П.В. Грес

Математика для бакалавров

Универсальный курс для студентов гуманитарных направлений

Москва • 2013 • Логос

УДК 51 (075.8)
ББК 22.11я73
Г79

Учебное пособие удостоено диплома
Сибирского регионального конкурса
«Университетская книга – 2010»
в номинации «Лучший совместный проект»

Рецензенты
А.В. Пожидаев, доктор физико-математических наук, профессор
Ю.И. Соловьев, доктор физико-математических наук, профессор
П.Е. Алаев, доктор физико-математических наук
А.К. Черненко, доктор физико-математических наук, профессор

Грес П.В.
Г79 Математика для бакалавров. Универсальный курс для студентов гуманитарных направлений: учеб. пособие / П.В. Грес. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Логос, 2013. – 288 с.: ил.

ISBN 978-5-98704-751-4

Содержит краткий курс математики. Рассмотрены предмет математики, ее методологические проблемы и принципы, а также элементы теории множеств, дискретной математики и математической логики. Представлены важнейшие разделы математического анализа. Изложены математические методы, используемые в рамках теории вероятностей, математической статистики, математического моделирования и принятия решений. Приведены основные определения и методы, примеры решения типовых задач, задания для самостоятельной работы. В отличие от предыдущих изданий представлены разделы по линейной и векторной алгебре, аналитической геометрии, а также глубже рассмотрены вопросы теории вероятностей и математической статистики. В учебном пособии нашел отражение опыт преподавания математики на гуманитарных специальностях вузов Новосибирска. Изложение материала адаптировано для обучения бакалавров.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям «Философия», «Психология», «Социология», «Юриспруденция», «Политология», «Социальная работа» и др.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.11я73

ISBN 978-5-98704-751-4

© Грес П.В., 2003, 2013
© Логос, 2007, 2013

Оглавление

У людей, усвоивших великие принципы математики, одним органом чувств больше, чем у простых смертных.

Ч. Дарвин

Предисловие

Математика — слово греческого происхождения. То, что греки назвали mathema — познание, наука, было известно до них и, по-видимому, задолго. Греки смогли впервые понять и по достоинству оценить это знание, придать ему системный характер и включить в исходное понятие философии понятие «бытие», через которое они выражали идею единства мира. Математика, наряду с астрономией, медициной, архитектурой, стоит у истоков современной науки, о чем свидетельствуют, в частности, «Начала» Евклида – книга о геометрии, написанная им в III в. до н.э. Используя математику, Г. Галилей и И. Ньютон создали первую научную механическую теорию.

Становление гуманитарных наук по времени совпадает с историей математики. Развитие гуманитарных знаний и математики не было параллельным движением, оно неоднократно пересекалось: И. Ньютон, Б. Спиноза, Г. Лейбниц, Ф. Энгельс. В XX в. ранее крайне неустойчивый союз математики и гуманитарных наук укрепился настолько, что появилась насущная потребность учитывать его наличие в вузовском образовании. Во многом эта метаморфоза объясняется принципиальным изменением мнения о познавательном потенциале математики. Длительное время математику рассматривали только в технологическом ракурсе, в качестве инструментария. Как заметил еще Галилей, «законы природы записаны на языке математики». Эвристическая функция математики раскрылась на рубеже XIX и XX вв.

В гуманитарных науках значение математики также огромно. Почему? Математика имеет дело с возможными мирами структур, упорядоченными совокупностями объектов. Любая гуманитарная наука изучает некоторую общность объектов, свойства и отношения, присущие им. Таким образом, математика раздвигает область своего приложения и актуализирует ее. К исследовательскому аппарату гуманитарных наук подключаются огромнейшие резервы математики, накопленные ею за тысячелетия.

Математика решающим образом способствует установлению упорядоченности гуманитарных структур. Математику можно уподобить оптическому прибору, позволяющему рассмотреть невидимое для обычного зрения. Она открывает нам структурные отношения объектов социального познания и предоставляет исключительно эффективный математический аппарат. Тот, кто не владеет математикой, не способен проникнуть в глубинные структурные отношения сложных динамически меняющихся объектов.

Начиная с древности математику широко использовали в социальной практике людей, например в строительном, военном искусстве. И тем не менее включение математики в практическую социокультуру оставалось ограниченным. Оно становится по-настоящему эффективным лишь тогда, когда осуществляется математизация самосознания. Математизация гуманитарных наук способствует познанию, управлению, прогнозированию и профилактике кризисных явлений, которыми насыщена современная историческая ситуация.

В сочетании с информатикой и ЭВМ математика становится междисциплинарным инструментарием, выполняющим две основные функции: во-первых, позволяет определять цели поступков людей и условия их достижения; во-вторых, анализировать широкий спектр возможных ситуаций и намечать оптимальные решения посредством использования математических моделей. Математическое моделирование признается обязательным этапом, предшествующим принятию ответственного решения в экономике, финансовых и банковских операциях, в планировании развития, определении структуры и ориентации социальных подразделений, в избирательных кампаниях.

Математизация гуманитарного образования ориентирована не только на обучение математическому мышлению, но и на развитие с помощью математики самого профессионального мышления гуманитариев. В соответствии с этим приоритетной задачей обучения математике в гуманитарных вузах становится не изучение основ математической науки как таковой, а общеинтеллектуальное развитие — формирование у студентов в процессе изучения математики мышления, необходимого для полноценного функционирования человека в современном обществе. Конкретные математические знания выступают базой организации полноценной в интеллектуальном и идейном отношении деятельности.

Содержание пособия находится в строгом соответствии с действующим государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования второго поколения и отражает подходы, положенные в основу разработки образовательных стандартов третьего поколения. Оно учитывает особенности подготовки бакалавров по всем гуманитарным и социально-экономическим направлениям.

Многие вещи нам непонятны не потому, что наши понятия слабы; но потому, что сии вещи не входят в круг наших понятий.

Козьма Прутков

ВВЕДЕНИЕ

В принципе математику можно рассматривать как разновидность уточненной, усовершенствованной логики. Замечательно, что, создав правила этой логики и выучив их, человек получил гораздо более мощное орудие, чем обыкновенный здравый смысл, основанный на традиционной, «домашней» логике. Тенденция ко все большей общности сопровождается ростом требований, предъявляемых к логической строгости. Однако в заботе о логической безупречности легко хватить через край, заменив словесные рассуждения потоком логических символов и слепым применением стандартных приемов. В этом направлении можно далеко зайти, и, вместо того, чтобы углубить понимание, совсем его потерять.

В настоящее время принято несколько искусственно разделять культуру на гуманитарную и естественнонаучную. «Гуманитарное» преподавание математики невозможно без изучения ее истории. Сюда входят и краткие сведения о возникновении тех или иных математических понятий и идей, о жизни выдающихся ученых.

Другая сторона математического образования — изучение приложений математики. В настоящее время создается система примеров и задач, ориентированных на гуманитарные приложения.

Гуманитарный потенциал математики раскрывается по следующим направлениям.

1. Математика изучает математические модели реальных процессов. Это позволит человеку, владе-

ющему математическим языком, глубже проникнуть в суть явлений, правильно ориентироваться в окружающей действительности.

2. Математика «ум в порядок приводит». Известно влияние математики на формирование мышления и личностных черт человека.

3. Человек, формулирующий математическое утверждение, проводящий математическое доказательство, оперирует не обыденной, а предметной речью, строящейся по определенным законам (краткость, четкость, лаконичность, минимизация и др.). Предметная речь оказывает существенное влияние и на развитие литературной речи.

4. Изучая математику, человек постоянно осознает свое развитие, «поумнение». Осознанность процесса обучения — один из краеугольных принципов теории развивающего обучения. Если взять за основу пять дидактических принципов теории развивающего обучения — обучение на достаточно высоком уровне трудности, быстрый темп обучения, приоритет теории, дифференцированный подход к учащимся и упомянутый выше принцип осознанности процесса обучения, то нетрудно убедиться, что обучение математике наиболее адекватно соответствует системе этих принципов.

Математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки бакалавра. Обусловлено это тем, что математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры.

Современная математика в сочетании с информатикой и ЭВМ становится междисциплинарным инструментарием, который выполняет две основные функции: обучает специалиста-профессионала формулировать цель того или иного процесса, определять условия достижения этой цели; позволяет анализировать, т. е. «проигрывать» возможные ситуации и получать оптимальные решения с помощью модели. Математическое моделирование должно стать обязательным этапом, предшествующим принятию любого решения.

Всеобщая компьютеризация не только не уменьшила важность математического образования, но и, наоборот, поставила перед ним новые задачи. Снижение уровня математического образования и математической культуры общества может превратить человека из хозяина компьютера в его прислугу и даже раба. Компьютерная наркомания — весьма распространенная болезнь, поразившая подрастающие поколения. Деформировалось правовое пространство. Уже сегодня мы стоим на пороге своеобразной компьютерной диктатуры, а может, и религии. Придуманный в древности «бог из машины» в конце XX в. реализовался в виде непогрешимой «богомашины». Математическое образование должно помочь сохраниться на Земле виду homo sapiens, не дать ему переродиться в homo computericus.

Одна из основных целей курса «Математика» — развитие мышления, прежде всего абстрактного, способности к абстрагированию и умения «работать» с абстрактными, «неосязаемыми» объектами. В процессе изучения математики в более чистом виде может быть сформировано логическое (дедуктивное) мышление, алгоритмическое мышление, многие качества мышления, такие как сила, гибкость, конструктивность, критичность. Эти качества сами по себе не связаны с каким-либо математическим содержанием и с математикой вообще, но обучение математике вносит в их формирование специфическую компоненту, которая не может быть эффективно реализована даже всей совокупностью остальных дисциплин.

В то же время конкретные математические знания, лежащие за пределами, условно говоря, арифметики натуральных чисел и первичных основ геометрии, не являются предметом первой необходимости для большинства людей и не могут составлять целевую основу обучения математике как предмету общего образования.

Именно поэтому в качестве основополагающего принципа математического образования в аспекте «Математика для гуманитариев» на первый план выдвигается принцип приоритета развивающей функции в обучении. Иными словами, обучение математике ориентировано не столько на собственно математическое образование, в узком смысле слова, сколько на образование с помощью математики. В соответствии с этим принципом главной задачей обучения математике становится не изучение основ математической науки как таковой, а общеинтеллектуальное развитие — формирование у студентов в процессе изучения математики качеств мышления, необходимых для полноценного функционирования человека в современном обществе и динамичной адаптации человека к этому обществу.

С точки зрения приоритета развивающей функции конкретные математические знания в аспекте «Математика для гуманитариев» рассматриваются не столько как цель обучения, сколько как база, «полигон» для организации полноценной в интеллектуальном отношении деятельности. При формировании личности, достижении высокого уровня его развития именно эта деятельность, как правило, оказывается более значимой, чем те конкретные математические знания, которые послужили для нее базой.

И еще одно важное обстоятельство: математика воспитывает такой склад ума, при котором требуется критическая проверка и логическое обоснование тех или иных положений и точек зрения. Элемент сомнения — это здоровая рациональная составляющая, присущая процессу математического мышления, нигде и никогда не помешает любому профессионалу.

Анализ учебной работы ряда вузов по гуманитарным направлениям показывает, что наибольшие трудности в практике реализации трех составляющих естественнонаучного блока — математики, информатики, естествознания — связаны, прежде всего, с введением в учебный процесс курса математики. Надеемся, что данная работа окажет помощь студентам при изучении дисциплины «Математика» в рамках гуманитарного профиля по направлениям и специальностям «Психология», «Социология», «Философия», «Юриспруденция» и др.

Математика – это орудие, специально приспособленное для того,
чтобы иметь дело с отвлеченными понятиями любого вида,
и в этой области нет предела ее могуществу.

П. Дирак

1. Методологические проблемы математики

Предмет математики нельзя ни подменять формальными логическими схемами, ни низводить до уровня коллекции разрозненных фактов. Математика есть учение об общих формах, свойственных реальному бытию, она создает постоянно развивающиеся теории, пригодные для самых различных запросов естествознания и техники. Именно это позволяет применять математические методы, разработанные при решении задач одной области науки, к совершенно непохожим на них задачам, относящимся к совсем иным областям знания.

1.1. Предмет математики

Известны два подхода к определению предмета математики. Одно определение дано Ф. Энгельсом, другое — коллективом французских математиков под общим псевдонимом Н. Бурбаки.

Согласно Ф. Энгельсу, «чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть, — весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевывать его происхождение из внешнего мира». Хотя это предложение нельзя считать полным определением математики, поскольку оно не указывает метод, цели изучения математики, но отражает то, что объект изучения создан умом человека не произвольно, а в связи с реальным миром.

Второй подход отражает методологические установки Н. Бурбаки, которые также определяют не математику, а только объекты, которые она исследует. Прежде чем привести их определение, отметим, что новый подход к объектам исследования в математике связан с «революцией в аксиоматике». Суть ее состоит в переходе от конкретной содержательной аксиоматики к аксиоматике сначала абстрактной, а затем полностью формализованной.

В конкретной содержательной аксиоматике, подобной аксиоматике Евклида, исходные понятия и аксиомы в качестве интерпретации имеют единственную систему хотя и идеализированных, но конкретных объектов. В противоположность этому абстрактная аксиоматика допускает бесчисленное множество интерпретаций. Формализованная аксиоматика возникает на основе абстрактной и отличается, во-первых, точным заданием правил вывода, во-вторых, вместо содержательных рассуждений использует язык символов и формул, в результате чего содержательные рассуждения сводятся к преобразованию одних формул в другие, т.е. к особого рода исчислениям. В соответствии с этим одни и те же аксиомы могут описывать свойства и отношения различных по своему конкретному содержанию объектов.

Эта фундаментальная идея лежит в основе понятия абстрактной структуры. Н.Бурбаки выделяют три основных типа структур, которые играют важную роль при построении ими современной математики.

1. Алгебраические структуры. Примерами таких структур являются группы, кольца и поля. Алгебраические структуры характеризуются заданием на некотором множестве A конечного числа операций с соответствующими свойствами, описываемых системой аксиом. В качестве элементов множества A могут выступать как математические объекты (числа, матрицы, перемещения, векторы), так и нематематические.

2. Структуры порядка. Они характеризуются тем, что на рассматриваемом множестве задается отношение порядка (сравнение на числовых множествах), для которого выполняются следующие свойства: рефлексивность, антисимметричность, транзитивность.

3. Топологические структуры. Множество *М* обладает топологической структурой, если каждому его элементу тем или иным способом отнесено семейство подмножеств из *М*, называемых окрестностями этого элемента, причем эти окрестности должны удовлетворять определенным аксиомам (аксиомам топологических структур). С помощью топологических структур точно определяются такие понятия, как «окрестность», «предел», «непрерывность».

Кроме основных трех типов структур (порождающих), в математике приходится рассматривать сложные структуры, где порождающие структуры органически связываются с помощью объединяющей системы аксиом. Например, множество действительных чисел является сложной структурой, в которую одновременно входят три основные порождающие структуры.

Общей чертой различных понятий, объединенных родовым названием «математическая структура», является то, что они применимы ко множеству элементов, природа которых не определена. Построить аксиоматическую теорию структуры — значит вывести логические следствия из аксиом структуры, отказавшись от каких-либо других предложений относительно рассматриваемых элементов, от всяких гипотез относительно их «природы».

На основе сказанного Н. Бурбаки делают вывод: «В своей аксиоматической форме математика представляется скоплением абстрактных форм — математических структур, и оказывается (хотя по существу и неизвестно почему), что некоторые аспекты экспериментальной действительности как будто в результате предопределения укладываются в некоторые из этих форм».

Итак, по Н. Бурбаки, математика — это «скопление математических структур», не имеющих к действительности никакого отношения. Следует сказать, что этот взгляд на математику разделялся многими учеными, которые считали, что определение Ф. Энгельса устарело.

Сопоставление двух подходов к определению объектов изучения математики можно провести только с позиции анализа истории развития математического знания. Академик А. Колмогоров выделил четыре основных периода развития математики.

Первый период период *зарождения математики*, который продолжался до VI–V вв. до н. э., т. е. до того времени, когда математика стала самостоятельной наукой, имеющей собственный предмет и метод.

Еще за три тысячелетия до новой эры вавилоняне умели решать квадратные уравнения и знали теорему, которая ныне носит название теоремы Пифагора. Древние владели достаточно большим набором не связанных между собой правил и формул для решения многих практических задач: измерение земельных участков, составление календарей, строительство и т.д. К сожалению, до нас не дошли источники, по которым можно было бы судить, каким образом люди получили используемые ими в то время математические сведения.

Второй период *развития математики* период элементарной математики (VI–V вв. до н. э. до XVI в. н. э. включительно). Математика как логический вывод и средство познания природы творение древних греков (VI–V вв. до н. э.). Не сохранилось документов, которые бы могли рассказать, что заставило древних греков прийти к новому пониманию математики и ее роли. А. Колмогоров считает, что изменение характера математической науки можно объяснить более развитой общественно-политической и культурной жизнью греческих государств, характеризовавшейся высоким развитием диалектики, искусством ведения спора. У греков к этому времени сложилось определенное миропонимание того, что Природа устроена рационально, а все ее явления протекают по точному и неизменному плану, который в конечном счете является математическим. Пифагорейцы (VI в. до н. э.) усматривали сущность вещей и явлений в числе и числовых соотношениях. Число для них было первым принципом в описании природы, оно же считалось материей и формой мира. Начала дедуктивного, аксиоматического метода были заложены также древнегреческими математиками.

Первые математические теории, абстрагированные из конкретных задач, создали необходимые и достаточные предпосылки для осознания самостоятельности и своеобразия математики. Это побудило античных математиков к систематизации и логической последовательности изложения ее основ. К IV в. до н.э. были выдвинуты принципы построения дедуктивной науки как логической системы, в основе которой лежат определенные начала — аксиомы. Развитие дедуктивной теории в первую очередь связано с именем Аристотеля (384–322 до н.э.). Первое систематизированное дедуктивное изложение математики (геометрии) принадлежит Евклиду (около 300 до н.э.). Геометрическая система, известная под названием «Начала» Евклида, была блестящим, непревзойденным в течение свыше 20 веков (вплоть до XIX в.) образцом логической строгости, аксиоматического метода. Хотя на протяжении двух тысячелетий и вскрывались логические пробелы в системе исходных положений Евклида, однако первые реальные успехи в создании аксиом геометрии были достигнуты только к концу XIX в. Пашем (1882), Пеано (1889), Пиери (1889).

Таким образом, в Древней Греции произошел постепенный переход от практической геометрии к теоретической.

Третий период — период создания *математики переменных величин (*XVII, XVIII вв. — начало XIX в.) знаменуется введением переменных величин в аналитической геометрии Р. Декарта (1596–1650) и созданием дифференциального и интегрального исчисления в трудах И. Ньютона (1642–1727) и Г. Лейбница (1646–1716). Основными направлениями научной деятельности Ньютона были физика, механика, астрономия и математика. Математика в системе научных взглядов Ньютона была частью общей науки о природе, орудием физических исследований. Разработанный им метод флюксий служил математическим аппаратом для изучения движения и связанных с ним понятий скорости и ускорения.

Математические работы Лейбница также тесно были связаны с его философскими воззрениями, в частности с созданием универсального метода научного познания, «всеобщей характеристикой». Математику Лейбниц мыслил как науку об отражении всевозможных связей, зависимостей элементов, отношений в виде формул, особого исчисления — дифференциального. Основой построения нового исчисления было понятие бесконечно малой величины, которое понималось прежде всего на уровне интуитивных представлений.

Несмотря на недостаточно разработанное исчисление бесконечно малых величин в школах Ньютона и Лейбница, оно позволяло решать многие важнейшие задачи геометрии, механики, физики и прикладных наук. Лишь во второй половине XIX в., когда была создана теория действительного числа, стало возможным построить здание математического анализа на строго логической основе.

Приведенное выше высказывание Ф. Энгельса отражает развитие математической науки от ее зарождения до середины XIX в. Основным источником развития математики до этого времени были запросы практики и физики (в основном механики и оптики). Математические теории отражали количественные (метрические) характеристики процессов.

Этим периодом, по Н. Бурбаки, обусловлен подход к объектам математического исследования.

Четвертый период – *современный* период в развитии математики, который начинается со второй половины XIX в. Состояние математики, сложившееся к этому времени, имеет следующие особенности.

Первая заключается в том, что накопленный в XVII и XVIII вв. огромный фактический материал привел к необходимости углубленного логического анализа и объединения его с новых точек зрения. Связь математики с естествознанием приобретает все более сложные формы. Новые теории стали возникать не только в результате непосредственных запросов практики, естествознания и техники, но также из внутренних потребностей самой математики. Наиболее важные из них: развитие теории функций, теории групп, связанной с исследованием проблемы разрешимости алгебраических уравнений в радикалах, создание неевклидовых геометрий.

Вторая особенность этого периода развития математики связана со значительным расширением области ее приложений. Если до этого математика применялась в таких разделах физики, как механика и оптика, то теперь ее результаты находят приложение в электродинамике, теории магнетизма, термодинамике. Резко возросли потребности техники в математике: баллистика, машиностроение и др.

Третья особенность математики XIX в. обусловлена усиленным вниманием к вопросам обоснования, критического пересмотра исходных положений (аксиом), построению строгой системы определений и доказательств, а также к критическому рассмотрению логических приемов, употребляемых при этих доказательствах. Г. Рузавин так пишет о математике этого периода: «Если раньше основным предметом ее изучения были метрические количественные отношения между величинами и пространственными формами, то начиная с середины XIX в. она все больше и больше обращается к анализу взаимосвязей не метрической природы». Такое расширение области исследования математики сопровождалось возрастанием абстрактности ее понятий и теорий.

Революционный переворот во взглядах на математику был связан как раз с ее обоснованием, новым пониманием аксиоматического метода. Открытие в 1826 г. Н. Лобачевским (1792–1856) того, что замена пятого постулата Евклида о параллельных его отрицанием («Через точку вне прямой проходит более одной прямой, не пересекающей данную»), и выводы из системы аксиом абсолютной геометрии (где выполняются все аксиомы Евклида, кроме аксиомы параллельности) и аксиомы параллельности Лобачевского не привели к логическим погрешностям.

Это развило столь же стройную и богатую содержанием геометрию, как и геометрия Евклида, послужило толчком в изменении взглядов на математику. Сразу встал вопрос о необходимости обоснования новой геометрии, исследовании ее непротиворечивости (из данной системы аксиом нельзя получить двух взаимоисключающих выводов). В этой связи получает дальнейшее развитие аксиоматический метод: 1) решается проблема непротиворечивости, полноты и независимости системы аксиом; 2) появляется новый взгляд на аксиоматическую теорию как бессодержательную, формально логическую систему. Решение этих проблем было предложено Д. Гильбертом (1862–1943).

Сущность аксиоматического метода состоит в том, что все объекты исследования, достигшие уровня зрелости, достаточного для оформления в теорию, прибегают к аксиоматическому методу, а через него, хотя и косвенно, к математике. Это можно описать следующим образом.

1. Строится абстрактная теория. В ее основании лежат термины двоякого рода: одни обозначают элементы одного или нескольких множеств (например, «точки», «прямые» и др.), другие — отношения между этими элементами (например, «принадлежит», «лежать между» и т. д.). Этим терминам пока не приписывают содержательный смысл, они только слова.

Устанавливаются аксиомы, которым должны удовлетворять термины. Из аксиом выводятся логические следствия (теоремы). Для сокращения речи вводятся новые термины с помощью определений.

2. Терминам абстрактной теории приписывается содержательный смысл. Теперь их роль меняется, они выражают понятия, имеющие более или менее наглядное, осязательное содержание. Следует проверить, соблюдаются ли для этих понятий аксиомы абстрактной теории.

Система, полученная путем приписывания содержательного смысла абстрактной теории, называется *моделью*, или *интерпретацией* этой теории.

Если каждая аксиома системы бессодержательной теории выполняется в построенной интерпретации, то этим доказывается относительная непротиворечивость исходной теории. Доказать непротиворечивость математической теории внутренними средствами математики невозможно. Так, для доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского была построена французским математиком А. Пуанкаре (1854–1912) модель, исходящая из предположения, что геометрия Евклида непротиворечива. Вопрос о непротиворечивости геометрии Евклида был сведен Д. Гильбертом к непротиворечивости арифметики. Доказанные в 30-е годы XX в. теоремы приводят к выводу о том, что подтвердить непротиворечивость арифметики математическими средствами нельзя.

Новый взгляд на аксиоматический метод в корне изменил прежние представления о геометрии как полуэмпирической науке. Из открытий неевклидовых геометрий и построения их интерпретаций следовало, что евклидова и неевклидовы геометрии не представляют непосредственное описание эмпирических свойств реального физического пространства, а являются абстрактными системами утверждений, истинность которых может быть проверена после соответствующей конкретной интерпретации.

Таким образом, подход Н. Бурбаки к определению математики как «скоплению абстрактных, бессодержательных, математических структур» был предопределен новым пониманием аксиоматического метода.

Однако подход Н. Бурбаки встретил и негативное отношение, поскольку авторы не считали нужным выяснять отношение рассматриваемых структур к действительному миру. Не имея возможности описать различные оценки философов и математиков на позицию Н. Бурбаки, остановимся на точке зрения ведущих отечественных математиков — А. Колмогорова, А. Александрова, В. Гнеденко. Они считают, что во времена Энгельса математика изучала количественные отношения между величинами и пространственными формами. Теперь она поднялась до изучения абстрактных структур и категорий. Но на этом основании нельзя считать, что объект изучения математики стал иным, что вместо количественного аспекта действительного мира математика стала исследовать нечто принципиально иное, что современный этап ее развития не связан с предшествующими этапами.

В действительности дело заключается в том, что качественные изменения, происшедшие в математике, дают ей возможность исследовать количественные отношения глубже и шире. А. Колмогоров приходит к выводу, что круг количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, чрезвычайно расширяется: в него входят отношения, существующие между элементами произвольной группы, векторами, операторами в функциональных пространствах, все разнообразие форм пространств любого числа измерений и т.д. При таком широком понимании терминов «количественные отношения» и «пространственные формы» определение математики как науки о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира применимо и на современном этапе ее развития.

Эту позицию разделяет и А. Александров, который считал, что в математике рассматриваются не только формы и отношения, непосредственно абстрагированные из действительности, но и логически возможные, определяемые на основе уже известных форм и отношений. Б. Гнеденко обращает внимание на то, что, хотя любая ветвь современной математики действительно изучает математические структуры, данное Н. Бурбаки определение отнюдь не находится в антагонистических отношениях с определением Ф. Энгельса, оно лишь с определенных позиций его дополняет.

Подводя итог сказанному, можно заключить, что подход к определению математики через математические структуры представляет собой выражение определенного этапа математического познания. Математика была и остается определенным «инструментом» познания мира, его пространственных форм и количественных отношений. В настоящее время, как уже отмечалось, этот «инструмент» проникает в изучение все более сложных процессов и явлений, в том числе и не метрической природы. Без осознания этого фундаментального философского, методологического положения не может быть сформировано целостное представление об общей картине мира.

Математика претендует на статус «особой» науки, изначально превышающей все прочие по уровню точности, истинности и непротиворечивости своих фундаментальных положений. В сфере конечных величин математика действительно относительно точна и непротиворечива; этого достаточно для более или менее адекватного количественного моделирования самых различных конечных по размерности предметных областей. Что же касается сферы бесконечного, то здесь у современной математики есть свои противоречия, которые могут быть преодолены лишь совместными усилиями математиков, философов и логиков.

1.2. Математический язык: особенность, становление и развитие

Математика подобно любой науке многомерна. На когнитивном уровне она выступает как мышление, на перцептуальном – как чувствование, на лингвистическом – как язык. Лингвистическое измерение математики заслуживает особого рассмотрения. Дело в том, что лишь благодаря ему математике придается интерсубъективный, общезначимый для всех людей характер. Мышление и чувствование всегда индивидуальны, язык же является достоянием всех.

Как известно, язык — это система принятых в некотором сообществе условных знаков и обеспечивающая коммуникацию его членов. Язык математики удовлетворяет этому определению. Подобно любому языку он состоит из совокупности высказываний (предложений). Особенность математического языка заключается в том, что в нем широко используются математические символы, объединяемые в формулы. Поэтому, часто говорят, что математика это язык символов и формул. Впрочем, язык математики не сводится к символьным записям и утверждениям. В любом математическом труде используются слова и обороты речи, позаимствованные из естественных языков: «предположим, что...», «и будем исходить из следующих аксиом», «математика это наука о...» и др. Но в контексте математики этим словам и оборотам речи придается специфическое значение, которое сопрягается со смыслом формализованных утверждений.

Язык математики – это язык людей, имеющих дело с математическими структурами. В одних случаях речь идет непосредственно об этих структурах, в других на их основе разрешаются те или иные конкретные ситуации.

Язык математики часто сравнивают с естественным языком. При этом, как правило, в восторженных тонах дается характеристика одного из них. Следует учитывать, что речь идет о *различных* языках. В случае математических структур для их описания необходим язык математики; на его фоне естественный язык громоздок и двусмыслен. В житейских ситуациях естественный язык имеет преимущества перед математическим языком, и ясно почему: здесь можно обойтись без детальных знаний о математических структурах. Естественный язык не нуждается в его замене математическим языком. Существенно другое — не усвоивший язык математики не воспользовался благоприятнейшей возможностью своего личного развития. Самое интересное состоит в том, что в общении друг с другом людям то и дело приходится переходить с естественного языка на язык математики и обратно. С различными языковыми переходами связаны также междисциплинарные функции математики.

До тех пор пока исследователь находится в пределах чистой математики, он обходится математическим языком. При этом у него нет нужды обращаться к каким-либо другим языкам. Ситуация резко изменяется, когда строятся так называемые математические *модели* тех или иных (физических, биологических, социальных и др. явлений). Математические модели строятся из терминов, интерпретированных на конкретную объектную область, являющуюся предметом той или иной конкретной науки. Использование математических моделей переводит чистую математику в прикладную. Например, рассуждая о евклидовой геометрии, мы пользуемся языком геометрии, а в случае обсуждения свойств физического макропространства на основе ньютоновской механики языком механики, а не математики. Если речь заходит о евклидовской модели физического пространства, то приходится, устанавливая соответствие между геометрией и механикой, одновременно пользоваться двумя языками — математическим и физическим.

Итак, в математике как таковой применяется математический язык, в конкретной науке — язык данной науки: в физике — язык физики, в экономике — язык экономики. В прикладной математике, т.е. в случае математических моделей, используют два языка: математический + язык конкретной науки.

Как же устроен математический язык? Прежде всего, этот язык абстрактный, в противоположность нашим конкретным языкам, где каждое слово имеет определенное значение. Язык математических формул и знаков обладает большей универсальностью и применяется во всех сферах человеческой деятельности. Система математических знаков является достоянием всего человечества, она вырабатывалась на протяжении тысячелетий. Математический язык — это результат совершенствования естественного языка по различным направлениям: устранения громоздкости и двусмысленности естественного языка, расширения его выразительных возможностей. Он употребляется как средство выражения математической мысли.

Язык в широком смысле — это словарь, грамматика, рассказы, повести, пьесы и романы, написанные на этом языке. Что же в математическом языке является аналогом слов и грамматики, а что рассказов и повестей? Аналог слов и грамматики — математическая операционная система, а рассказов, повестей и прочего — математические модели (рис. 1).

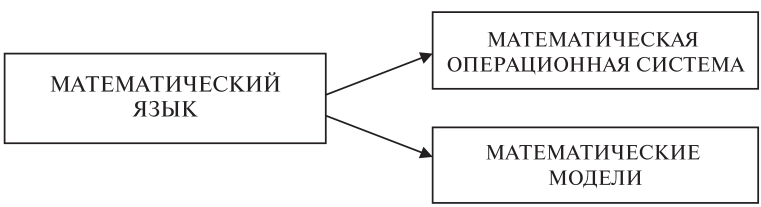


Рис. 1

Овладение математическим языком предполагает сознательное усвоение содержания математических понятий, отношений между ними (аксиом, теорем) и умение рационально и грамотно выразить математическую мысль в устной и письменной формах с помощью средств математического языка, а также свободное оперирование математическими знаниями, умениями и навыками на практике.

Овладение математическим языком формирует навыки рационального выражения мысли: последовательность, точность, ясность, лаконичность, выразительность, экономность, информированность. Сознательное и свободное владение математическим языком является условием и средством овладения математической культурой (рис. 2).

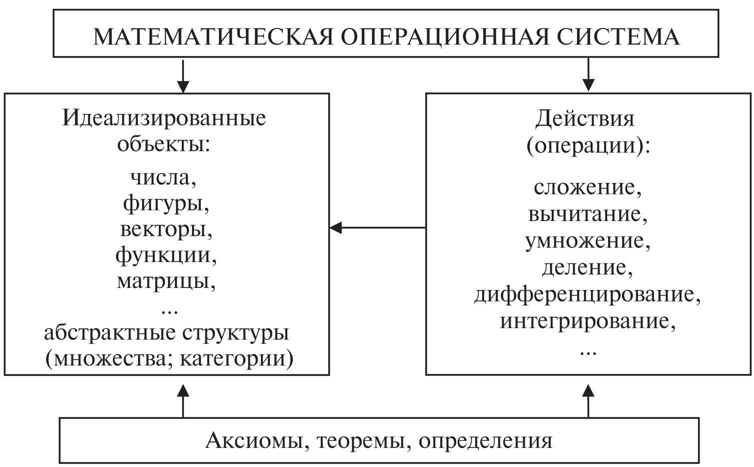


Рис. 2

К недостаткам математического языка можно отнести его специфичность и ограниченную возможность отображения. Достоинства языка заключаются в том, что он позволяет с помощью символов выражать мыслительные операции в сокращенном и свернутом виде и отличается большой прогностической силой.

Множество абстрактных элементов и действий с ними образуют то, что можно назвать *операционной системой: элементы* — это числа, векторы, функции, матрицы и др.; *действия* (операции) — сложение, вычитание, умножение, деление, дифференцирование, интегрирование и др.

У операционной системы есть четкие внутренние побудительные мотивы развития и цели: это расширение и выполнимость операций, охват всего, что мы хотим описать. Проиллюстрируем эти мотивы на примере истории становления и развития математической операционной системы. При этом будем придерживаться не хронологии событий, а логики их следования.

Все начиналось с целых чисел. Затем возникли действия с ними: сложение и обратное действие — вычитание; умножение и деление. Невыполнимость деления была преодолена введением дробных чисел, вычитания — отрицательных чисел.

Действительные числа — камень преткновения древних греков — получили обоснование, успокоившее математиков, только в сечениях рациональных чисел Дедекинда и сходящихся их последовательностей Вейерштрасса. Так пришли к действительным числам, с которыми выполнимы операции сложения, вычитания, умножения, деления, нахождения предела, которые обозначаются соответственно знаками «+», «—», «×», «:», «lim» (исключения с делением на нуль и пределом неограниченно возрастающей последовательности не в счет: на то и исключения, хотя и их избегают в так называемом нетрадиционном математическом анализе).

После действительных чисел появились комплексные — как замыкание операции решения квадратных уравнений. С их введением любое алгебраическое уравнение стало разрешимым. Потом У. Гамильтон (1805—1865) придумал кватернионы как расширение комплексных чисел. Они не привились, но их частный случай — векторы и действия с ними (сложение, вычитание, скалярное и векторное произведения) вошли в широкий обиход математики.

Потребность в описании эволюционных процессов изменения привела к появлению переменных величин, а затем и функций от них, дифференциального и интегрального исчислений, дифференциальных уравнений. Возникли множества и действия с ними (объединение, пересечение, дополнение, произведение) и многое-многое другое.

Как общий прием расширения операционной системы, помимо отмеченного уже расширения для выполнимости операций, можно указать перевод функций как операций в элементы, операций над функциями элементами опять в элементы, с которыми в свою очередь также можно производить операции. Так она пополнилась современным функциональным анализом и теорией операторов, причем операционная система обрела, исходя из своих внутренних законов развития, теорию линейных операторов раньше, чем та потребовалась физике для описания явлений микромира.

Помимо принципиальной выполнимости операций, огромное значение имеет фактическая ее выполнимость, простота и доступность. Так, древние греки с трудом вычисляли произведение, например, наших чисел 473 и 328, потому что записывали их в виде CDLXXIII и CCCXXVIII.

Оливер Хевисайд (1850—1925), не признанный современниками, сделал операцию интегрирования легко выполнимой и сводимой к делению на комплексное число. Это позволило ему решить очень много задач, не решенных ранее. Хевисайд был великим ученым: предсказал наличие в верхних слоях атмосферы ионизированного слоя, отражающего радиоволны; подсчитал излучение движущегося электрона; указал формулу, известную в науке как знаменитая формула Эйнштейна.

Современные ЭВМ и методы вычислений и программирования в обсуждаемом плане следует рассматривать как новые, эффективные средства реализации трудных операций математической операционной системы.

1.3. Геометрия Евклида — первая естественнонаучная теория

Исторический обзор обоснования геометрии. Основным методом современной математики, в частности геометрии, является аксиоматический метод, который берет свое начало от «Оснований геометрии» Д. Гильберта. Геометрия, прежде чем стать аксиоматической теорией, прошла долгий путь эмпирического развития.

Первые сведения о геометрии были получены цивилизациями Древнего Востока — в Египте, Китае, Индии — в связи с развитием земледелия, ограниченностью плодородных земель и др. В этих странах геометрия носила эмпирический характер и представляла собой набор отдельных «рецептов-правил» для решения конкретных задач. Уже во II тыс. до н.э. египтяне умели точно вычислять площадь треугольника, объем усеченной пирамиды, площадь круга, а вавилоняне знали теорему Пифагора. Заметим, что доказательств не было, а указывались лишь правила для вычислений.

Греческий период развития геометрии начался в VII—VI вв. до н. э. под влиянием египтян. Отцом греческой математики считается знаменитый философ Фолес (640—548 до н.э.). Фолесу, точнее его математической школе, принадлежат доказательства свойств равнобедренного треугольника, вертикальных углов. В дальнейшем им были получены результаты, охватывающие почти все содержание современного школьного курса геометрии.

Философская школа Пифагора (570—471 до н.э.) открыла теорему о сумме углов треугольника, доказала теорему Пифагора, установила существование пяти типов правильных многогранников и несоизмеримых отрезков. Демокрит (470—370 до н.э.) открыл теоремы об объемах пирамиды и конуса. Евдокс (410—356 до н.э.) создал геометрическую теорию пропорций (т. е. теорию пропорциональных чисел). Менехм (IV в. до н.э.) и Аполлоний Пергский (2-я пол. III в. — 1-я пол. II в. до н.э.) создали теорию конических сечений. Архимед (289—212 до н.э.) открыл правила вычисления площади поверхности и объема шара и других фигур. Он же нашел приближенное значение числа π.

Особая заслуга древнегреческих ученых состоит в том, что они первыми поставили проблему строгого построения геометрических знаний и решили ее в первом приближении. Проблему поставил Платон (428—348 до н.э.). Аристотелю (384—322 до н.э.) — крупнейшему философу, основателю формальной логики — принадлежит четкое оформление идеи построения геометрии в виде цепи предложений, которые вытекают одно из другого на основе лишь правил логики.

Эту задачу пытались решить многие греческие ученые (Гиппократ, Федий). Воспитанник школы Платона, крупнейший геометр древности Евклид (330—275 до н.э.), живший в Египте (в Александрии), является автором 13 книг (глав) под названием «Начала». В них он дает систематическое изложение начал геометрии на таком научном уровне, что многие века преподавание геометрии велось по его сочинению. Первые шесть книг (I—VI) посвящены планиметрии; книги VII—IX — арифметике в геометрическом изложении; X — несоизмеримым отрезкам, и XI—XIII — стереометрии.

Замечание 1. В «Начала» были включены не все сведения, известные в геометрии. Например, в эти книги не вошла теория конических сечений, а также кривые высших порядков.

Замечание 2. Каждая книга начинается с определения тех понятий, которые в ней встречаются. Например, в книге II даны 23 определения. Приведем определения первых четырех понятий:

1. Точка есть то, что не имеет частей.

2. Линия есть длина без ширины.

3. Границы линии суть точки.

4. Прямая есть такая линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам.

Евклид приводит предложения, принимаемые без доказательства, разделяя их на постулаты и аксиомы. Постулатов у него пять, а аксиом — семь. Вот некоторые из них.

Постулаты

<...> IV. И чтобы все прямые углы были равны.

V. И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Аксиомы

I. Равные порознь третьему равны между собой.

II. И если к равным прибавить равные, то получим равные.

<...> VII. И совмещающиеся равны.

Замечание 1. Евклид не указал, в чем заключается различие между постулатами и аксиомами. До сих пор нет окончательного решения этого вопроса.

Замечание 2. Евклид изложил теорию геометрии так, как требовали греческие ученые, особенно Аристотель, т.е. теоремы расположены таким образом, что каждая следующая доказывается только на основе предыдущих. Иначе говоря, Евклид, развивая геометрическую теорию, придерживается строго логического пути. В этом и заключается историческая заслуга Евклида перед наукой.

«Начала» Евклида сыграли огромную роль в истории математики и всей человеческой культуры. Эти книги переведены на все основные языки мира, после 1482 г. они выдержали около 500 изданий.

Недостатки системы Евклида. С точки зрения современной математики изложение «Начал» следует признать несовершенным. Назовем основные недостатки этой системы:

1. Многие понятия включают такие, которые в свою очередь требуют также определения (например, используемые в определениях 14 главы 1 понятия ширины, длины, границы).

2. Список аксиом и постулатов недостаточен для построения геометрии строго логическим путем. Например, в этом списке нет аксиом порядка, без которых нельзя доказать многие теоремы геометрии (на это обстоятельство обратил внимание Гаусс). В указанном списке отсутствуют также определения понятия движения (совмещения) и свойств движения, т.е. аксиом движения. В списке нет также аксиомы Архимеда (одной из двух аксиом непрерывности), которая играет важную роль в теории измерений длин отрезков, площадей фигур и объектов тел. Заметим, что на это обратил внимание современник Евклида — Архимед.

3. Постулат IV явно лишний, его можно доказать как теорему.

Особо отметим постулат V. В книге I «Начал» первые 28 предложений доказаны без ссылок на него. Попытка минимизировать список аксиом и постулатов, в частности доказать постулат V как теорему, проводилась со времен самого Евклида. Прокл (V в. н. э.), Омар Хайям (1048—1123), Валлис (XVII в.), Саккери и Ламберт (XVIII в.), Лежандр (1752—1833) также пытались доказать постулат V как теорему. Их доказательства были ошибочными, но они привели к положительным результатам — рождению еще двух геометрий (Римана и Лобачевского).

Неевклидовы геометрические системы. Н.И. Лобачевский (1792—1856), который открыл новую геометрию — геометрию Лобачевского, также начал с попытки доказательства постулата V. Он развил свою систему до объема «Начал» в надежде получить противоречие. Не получил, но сделал (1826) правильный вывод: существует геометрия, отличная от геометрии Евклида.

На первый взгляд этот вывод кажется недостаточно обоснованным: может быть, развивая его дальше, можно прийти к противоречию. Но этот же вопрос относится и к геометрии Евклида. Иначе говоря, обе геометрии равноправны перед вопросом о логической непротиворечивости. Дальнейшие исследования показали, что из непротиворечивости одной следует непротиворечивость другой геометрии, т. е. имеет место равноправие логических систем.

Лобачевский был первым, но не единственным, сделавшим вывод о существовании другой геометрии. Гаусс (1777—1855) высказал эту идею еще в 1816 г. в частных письмах, но в официальных публикациях заявление не сделал.

Три года спустя после публикации результатов Лобачевского (1829), т.е. в 1832 г., вышла работа венгра Я. Бойяи (1802—1860), который в 1823 г. пришел к выводу о существовании другой геометрии, но опубликовал его (вывод) позже и в менее развитом, чем у Лобачевского, виде. Поэтому справедливо, что эта геометрия носит имя Лобачевского.

Общему признанию геометрии Лобачевского в значительной степени способствовали последующие работы математиков. В 1868 г. итальянский математик Э. Бельтрами (1825—1900) доказал, что на поверхности постоянной отрицательной кривизны (так называемая псевдосфера) подтверждается геометрия Лобачевского. Уязвимым местом доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского, основанного на интерпретации Бельтрами, было то, что, как показал Гильберт (1862—1943), в евклидовом пространстве не существует полной поверхности постоянной отрицательной кривизны без особенностей. Поэтому для поверхности постоянной отрицательной кривизны можно интерпретировать только часть плоской геометрии Лобачевского. Этот недостаток был устранен позднее Пуанкаре (1854—1912) и Клейном (1849—1925).

Доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского было вместе с тем и доказательством независимости постулата V от остальных. Действительно, в случае зависимости геометрия Лобачевского была бы противоречивой, так как она содержала бы два взаимно исключающих утверждения.

Дальнейшие исследования евклидовой геометрии подтвердили неполноту системы аксиом и постулатов Евклида. Исследование аксиоматики Евклида завершил в 1899 г. Гильберт, аксиоматика которого состоит из пяти аксиом, а именно:

- связи (принадлежности);
- порядка;
- конгруэнтности (равенства, совпадения);
- непрерывности;
- параллельности.

Эти аксиомы (всего их 20) относятся к объектам трех родов: точки, прямые, плоскости, а также к трем отношениям между ними, выражаемыми словами: «принадлежит», «лежит между», «конгруэнтен». Конкретный смысл точек, прямых, плоскостей и отношений не указан. Они косвенно определены через аксиомы. Благодаря этому построенная на основе аксиом Гильберта геометрия допускает различные конкретные реализации.

Геометрическая система, построенная на перечисленных аксиомах, называется *евклидовой*, так как совпадает с геометрией, изложенной Евклидом в «Началах».

Геометрические системы, отличные от евклидовой, называются *неевклидовыми геометриями*. Согласно общей теории относительности, в пространстве ни та, ни другая не являются абсолютно точными, однако в малых масштабах (земные масштабы являются также достаточно малыми) они вполне пригодны для описания пространства. Применение на практике евклидовых формул объясняется их простотой.

Гильберт всесторонне исследовал свою систему аксиом, показал, что она непротиворечива, если не противоречива арифметика (т. е. на самом деле доказана содержательная или так называемая внешняя непротиворечивость). Он завершил многовековые исследования ученых по обоснованию геометрии. Эта работа была высоко оценена и в 1903 г. отмечена премией имени Лобачевского.

В современном аксиоматическом изложении геометрии Евклида не всегда пользуются аксиомами Гильберта: учебники по геометрии построены на различных модификациях этой системы аксиом.

В XX в. было обнаружено, что геометрия Лобачевского не только имеет важное значение для абстрактной математики как одна из возможных геометрий, но и непосредственно связана с приложениями математики. Оказалось, что взаимосвязь пространства и времени, открытая А. Эйнштейном и другими учеными в рамках специальной теории относительности, имеет непосредственное отношение к геометрии Лобачевского.

1.4. Место и роль математики в современном мире, мировой культуре и истории, в том числе в гуманитарных науках

Роль математики в общечеловеческой культуре огромна. Обращаясь к истории философии, следует отметить, что ученые, создававшие математику Нового времени, рассматривали математическую науку как составную часть философии, которая служила средством познания мира (рис. 3).

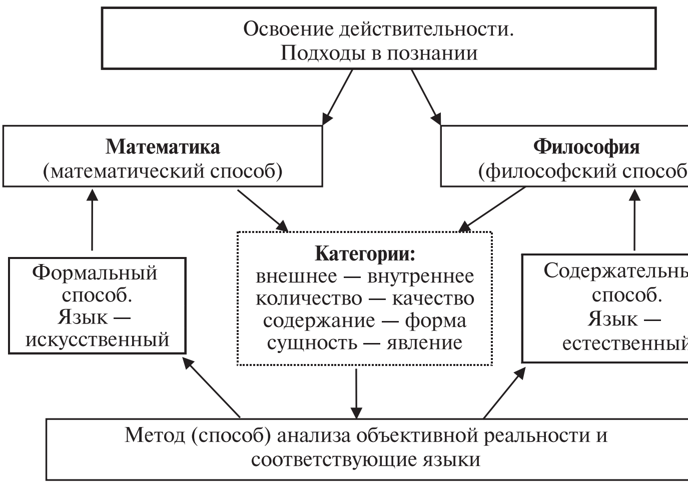


Рис. 3

Место математики в жизни и науке определяется тем, что она позволяет перевести «общежитейские», интуитивные подходы к действительности, базирующиеся на приблизительных описаниях, на язык точных определений и формул, из которых возможны количественные выводы. Не случайно говорят, что степень научности той или иной дисциплины измеряется тем, насколько в ней применяется математика.

Математика является частью общечеловеческой культуры. На протяжении нескольких тысячелетий развития человечества шло накопление математических фактов, что привело около двух с половиной тысяч лет назад к возникновению математики как науки. Квадривий, изучавшийся в Древней Греции, включал арифметику, геометрию, астрономию и музыку. О значении математики для человечества говорит тот факт, что «Начала» Евклида издавались бесчисленное число раз.

Математика способствует выработке научного мировоззрения и достижению необходимого общекультурного уровня. История зарождения великих математических идей, судьбы таких выдающихся математиков, как Архимед, Галуа, Паскаль, Галилей, Гаусс, Эйлер, Ковалевская, Чебышев и др., дают пищу для ума и сердца, примеры беззаветного служения науке, приводят к философским размышлениям и нравственным поискам.

Математические рассуждения позволяют правильно устанавливать причинно-следственные связи, что безусловно должен уметь каждый человек. Стиль изложения математики, ее язык влияют на речь. Каждый культурный человек должен иметь представление об основных понятиях математики, таких, как число, функция, математическая модель, алгоритм, вероятность, оптимизация, величины дискретные и непрерывные, бесконечно малые и бесконечно большие. Речь идет именно об основных понятиях и идеях, а не о наборе конкретных формул и теорем.

Человек, знающий математику лишь по школьному курсу, вряд ли сознает, сколь мизерное (но предельно необходимое) количество знаний, накопленных задолго до начала XX в., сообщается в школе. А ведь в наши дни в мире ежемесячно выходят сотни математических журналов, публикующих тысячи новых теорем с трудными, порой многостраничными доказательствами. И это не считая публикаций по приложениям математики. Следует отметить тесную взаимосвязь между расширением ее фронта, усилением активности и изменением представлений математиков о предмете своей науки (хотя полного единодушия во взглядах нет). Сейчас не удивишь словосочетаниями «математическая лингвистика», «математическая биология», «математическая экономика» и др. Какую дисциплину ни взять, вряд ли кому-нибудь покажется невозможным присоединение к ее наименованию эпитета «математический». Математика занимает сегодня видное место в жизни общества.

Тем не менее повсеместный триумф математики некоторым кажется загадочным, даже подозрительным. В самом деле, не вызывает сомнений право на всеобщее признание, например, физики или химии. Физика открывает нам новые источники энергии, новые средства быстрой связи. Химия создает искусственные ткани, а сейчас пытается создать искусственную пищу. Неудивительно, что эти науки, помогающие человеку в его извечных поисках энергии, связи, одежды и еды, прочно вошли в нашу жизнь.

Что же дает математика, которая не открывает новых способов передвижения, как физика, и не создает новых вещей, как химия? Почему появление в какой-либо отрасли науки и техники математических методов означает и достижение в этой отрасли определенного уровня зрелости, и начало нового этапа развития?

Еще недавно ответ на эти вопросы состоял в том, что математики умеют хорошо вычислять и осуществляют математическую обработку цифровых данных, связанных с тем или иным изучаемым процессом. Однако при всей важности вычислительного аспекта математики, особенно в последние годы в связи с бурным ростом вычислительной техники, он оказывается неглавным при попытке объяснить причины математизации современного мира.

Главная причина этого процесса такова: математика предлагает весьма эффективные модели для изучения окружающей действительности в отличие от менее общих и более расплывчатых моделей, предлагаемых другими науками. Такие модели математика дает с помощью своего особого языка — языка чисел, различных символов. При этом математическая модель, отображая и воспроизводя те или иные стороны рассматриваемого объекта, способна замещать его так, что исследование модели даст новую информацию об объекте, опирающуюся на принципы математической теории, сформулированные математическим языком законы природы и общества. Если математическая модель верно отражает суть данного явления, то она позволяет находить и не обнаруженные ранее закономерности, давать математический анализ условий, при которых возможно решение теоретических или практических задач, появляющихся при исследовании этого явления.

Возникает один общий вопрос: нужна ли математика гуманитарию вообще и, например, юристу в частности?

Известно, что математика является частью общечеловеческой культуры, такой же неотъемлемой и важной, как право, медицина, естествознание и многое другое. Все лучшие достижения человеческой мысли, человеческих рук и составляют основу гуманитарного образования, необходимого каждому современному человеку. Исходя из этого, для студента гуманитария математика прежде всего *общеобразовательная дисциплина*, как, например, право для студента-математика.

Но значение математики этим не исчерпывается. Напомним слова М.В. Ломоносова: «Математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит». Математика влияет на упорядочение ума общностью и абстрактностью своих конструкций. Математика полна всякого рода правил, общих, строго определенных методов решения различных классов однотипных задач. Решая любую задачу, человек должен строго следовать точному предписанию (алгоритму) о том, какие действия и в каком порядке надо выполнить. Нередко изучающему математику приходится составлять подобные предписания, т. е. находить алгоритм.

Можно утверждать, что математика учит точно формулировать разного рода правила, предписания, инструкции и строго их исполнять (не последнее качество, необходимое, например, любому юристу). В юриспруденции, как и в математике, применяются одни и те же методы рассуждений, цель которых — *выявить истину*. Любой правовед, как и математик, должен уметь рассуждать последовательно, применять на практике индуктивный и дедуктивный методы. Занимаясь математикой, будущий правовед формирует свое *профессиональное мышление*.

Кроме того, применение математических методов расширяет возможности каждого специалиста. Существенную роль играют статистика, умение правильно обработать информацию, сделать достоверный вывод или прогноз на основании имеющегося статистического материала.

Мы живем в век математики. В настоящий момент одни науки уже безоговорочно приняли математику на вооружение, другие только начали ее применять. Гуманитарии, например, относятся к последним. Среди них немало еще сомневающихся в перспективности использования математических методов. Однако в настоящее время большая их часть спорит уже не о том, «нужно ли применять», а о том «где и как лучше применять»[1].

Математика это феномен общемировой культуры, в ней отражена история развития человеческой мысли. Математика, с ее строгостью и точностью, формирует личность, предоставляет в ее распоряжение важнейшие ресурсы, столь необходимые для обеспечения наилучшего будущего.

Итак, математическое образование важно с различных точек зрения:

• *логической* — изучение математики является источником и средством активного интеллектуального развития человека, его умственных способностей;

• *познавательный* — с помощью математики познается окружающий мир, его пространственные и количественные отношения;

• *прикладной* — математика является той базой, которая обеспечивает готовность человека как к овладению смежными дисциплинами, так и многими профессиями, делает для него доступным непрерывное образование и самообразование;

• *исторической* — на примерах из истории развития математики прослеживается развитие не только ее самой, но и человеческой культуры в целом;

• *философской* — математика помогает осмыслить мир, в котором мы живем, сформировать у человека развивающиеся научные представления о реальном физическом пространстве.

---

[1] См., например: *Миронов Б. Н., Степанов З. В.* Историк и математика. – Л.: Наука, 1975; *Биркгоф Г.* Математика и психология. – М.: Сов. радио, 1977; *Моисеев Н. Н.* Математика в социальных науках // Математические методы в социологическом исследовании. – М., 1981; *Тихомиров Н. Б., Шелехов А. М.* Математика: Учебный курс для юристов. – М.: Юрайт, 1999.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Приведите 2—3 распространенных в литературе определения понятия «математика».

2. Какие аксиомы и постулаты привел Евклид в своих «Началах» в III в. до н.э.?

3. Определите основные этапы становления современной математики.

4. В чем состоят достоинства и недостатки математического языка?

5. В чем особенность математической индукции?

6. В чем заключается сущность аксиоматического метода?

Сегодня мы знаем, что, логически говоря,
возможно вывести почти всю современную математику
из единого источника – теории множеств.

Н. Бурбаки

2. Теория множеств

Одним из методов математики является метод применения абстракции, при которой не принимаются во внимание некоторые конкретные обстоятельства. Это неизбежно приводит к возникновению понятия множества, которое стало основным понятием математики. Язык теории множеств, включающий большое число различных понятий и связей между ними, все глубже проникает в литературу. Поэтому надо понимать этот язык и уметь им пользоваться.

Было бы неправильно переоценивать теорию множеств: это всего-навсего удобный язык, и, если вы в совершенстве владеете им и больше ничего из математики не знаете, едва ли от этого будет прок. Наоборот, если вы знаете «много математики» и совсем незнакомы с теорией множеств, вы, возможно, достигнете успехов. Но если вы знаете что-то и из теории множеств, вы будете значительно лучше понимать язык математики.

2.1. Множества. Операции над множествами

Понятие множества является ключевым в математике, без которого невозможно изложение ни одного из ее разделов Подсознательно первые представления о множестве у человека начинают формироваться с рождения, когда он погружается в удивительно многообразный мир окружающих его объектов и явлений. В нем уже генетически заложены возможности ускоренно воспроизвести весь опыт общения с этим миром, накопленный человечеством за многовековую историю. Уникальность этого генетического потенциала и отличает прежде всего человека от других существ. С первых же шагов мы не просто пополняем список знакомых нам объектов и явлений, а начинаем дифференцировать и классифицировать (горячие и холодные, сладкие и горькие, тяжелые и легкие, красные и зеленые и т.д.), объединяя тем самым объекты в некоторые совокупности. Первый же опыт общения с ними убеждает нас и в том, что каждый объект имеет сложную структуру (кто из нас не ломал ни одной игрушки, пытаясь выяснить из чего она состоит), представляет собой как бы определенную совокупность других объектов, из которых, как из составляющих, состоит сам.

Множество — первичное понятие математики, т. е. это понятие не определяется через другие, а только поясняется. Создатель теории множеств Г. Кантор (1845—1918) определил множество как «объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью», а также «множество есть многое, мыслимое нами как единое». Разумеется, эти слова не могут рассматриваться как математически строгое определение множества, такого определения не существует, поскольку понятие множества является исходным, на основании которого строятся остальные понятия математики, т.е. множество является основным строительным материалом математики.

Множество — это совокупность каких-либо объектов. Так, можно говорить о множестве целых чисел, о множестве точек на прямой, о множестве жителей города и др. Объекты, входящие в данное множество, называются его элементами. Элементами множества могут быть разнообразные предметы: буквы, числа, функции, точки, углы, люди и т.д. Отсюда с самого начала ясна чрезвычайная широта теории множеств и ее приложимость к очень многим областям знания.

Множества, состоящие из конечного числа элементов (причем неважно, известно это число или нет, главное, оно существует), называются *конечными*, а множества, состоящие из бесконечного числа элементов, — *бесконечными*.

Множества обычно обозначаются большими буквами A, B, X, а их элементы — малыми буквами a, b, x.

Запись $x \in X$ означает, что объект x есть элемент множества X. Если x не принадлежит множеству X, то пишут $x \notin X$.

Запись $A \subset B$ (множество A содержится в B) означает, что каждый элемент множества A принадлежит B. В этом случае множество A называют *подмножеством* множества B.

Множества A и B называют *равными* ($A = B$), если $B \subset A$ и $A \subset B$. Например, множества $A = \{3, 5, 7, 9\}$ и $B = \{7, 3, 9, 5\}$ равны, так как состоят из одинаковых элементов.

Если множество не содержит ни одного элемента, то его называют *пустым* и обозначают символом $\varnothing$.

Совокупность допустимых объектов называют *основным (универсальным)* множеством (обычно U). Множество задают либо *перечислением* его элементов, либо *описанием свойств* множества, которые четко определяют совокупность его элементов. При втором способе множество обычно определяется как совокупность тех, и только тех, элементов из некоторого основного множества T, которые обладают свойством α. В этом случае используют обозначение $A = \{x \in T\colon \alpha(x)\}$.

Например, множество $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ равно $A = \{x \in \mathbf{N}\colon x < 6\}$ и $A = \{x \in \mathbf{N}\colon 0{,}5 < x < 5{,}9\}$, где $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел.

Упражнения

1. Какие из следующих множеств геометрических фигур на плоскости равны между собой? Если:

A — множество всех квадратов;

B — множество всех прямоугольников;

C — множество всех четырехугольников с прямыми углами;

D — множество всех прямоугольников с равными сторонами;

F — множество всех ромбов с прямыми углами.

Ответ: $A = D = F$; $B = C$.

2. Для каждого из слов «сосна», «осколок», «насос», «колос» составьте множество его различных букв. Имеются ли среди них равные?

Ответ: A = {с, о, н, а}, B = {о, с, к, л}, C = {н, а, с, о}, D = {к, о, л, с}; $A = C$, $B = D$.

Алгебраические операции над множествами и их свойства излагаются обычно с применением *кругов Эйлера* или *диаграмм Венна* (рис. 4), а бинарные отношения иллюстрируются на *матрицах* и *графах*. Благодаря этому основные понятия теории множеств можно представить в табличной или графической форме.

Множества можно определять также при помощи *операций* над некоторыми другими множествами. Пусть имеются два множества A и B.

Объединение (сумма) $A \cup B$ есть множество всех элементов, принадлежащих A или B, т.е.

$$A \cup B = \{x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Например, $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Пересечение (произведение) $A \cap B$ есть множество всех элементов, принадлежащих как A, так и B, т.е.

$$A \cap B = \{x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Например, $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$. Множества, не имеющие общих элементов ($A \cap B = \varnothing$), называют *непересекающимися* (расчлененными).

Разность $A \setminus B$ есть множество, состоящее из всех элементов A, не входящих в B, т. е.

$$A \setminus B = \{x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Например, $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\} = \{1\}$. Ее можно рассматривать как *относительное дополнение* B до A.

Симметрическая разность (дизъюнктивная сумма) $A \Delta B$ есть множество всех элементов, принадлежащих или A, или B (но не обоим вместе), т.е.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Например, $\{1, 2, 3\} \Delta \{2, 3, 4\}=\{1, 4\}$. Дизъюнктивная сумма получается объединением элементов множеств, за исключением тех, которые встречаются дважды.

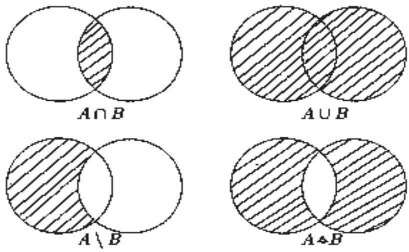


Рис. 4

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Являются ли эти множества равными? Определите пересечение, объединение, разности этих двух множеств. Одинаковы ли множества $A \setminus B$ и $B \setminus A$?

Множества A и B не равны друг другу, так как содержат разные элементы. Между элементами этих множеств может быть установлено однозначное соответствие, поэтому множества являются эквивалентными. Пересечение множеств $A \cap B$ включает только те элементы, которые содержатся в обоих множествах, поэтому $A \cap B = \{2, 4\}$. Объединение $A \cup B$ включает все элементы, содержащиеся хотя бы в одном из множеств A или B, таким образом, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$. Разность $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$, а разность $B \setminus A = \{6, 8, 10\}$. Очевидно, что $A \setminus B$ и $B \setminus A$ не равны. Симметрическая разность $A \Delta B = \{1, 3, 5, 6, 8, 10\}$.

Упражнения

1. Даны два множества: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $B = \{3, 6, 9, 12\}$. Найти объединение, пересечение, разности этих множеств.

Ответ: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12\}$; $A \cap B = \{3, 6\}$; $A \setminus B = \{1, 2, 4, 5\}$; $B \setminus A = \{9, 12\}$. $A \Delta B = \{1, 2, 4, 5, 9, 12\}$.

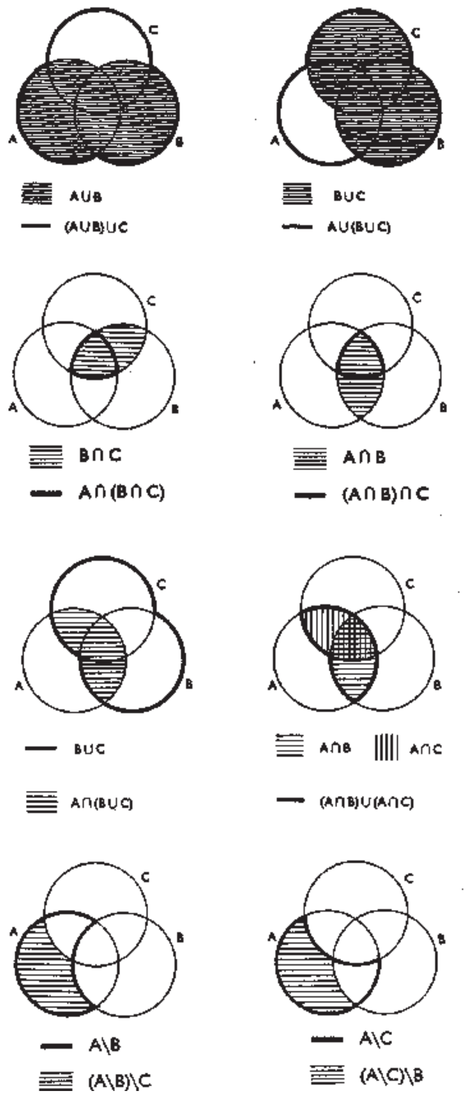
2. По данным промежуткам $A = (-7; 1]$ и $B = [-3; 4]$ на числовой прямой определить $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.

Ответ: $A \cup B = (-7; 4]$; $A \cap B = [-3; 1]$; $A \setminus B = (-7; -3)$; $B \setminus A = (1, 4]$; $A \Delta B = (-7; -3) \cup (1; 4]$.

3. Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; $D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Задайте списком множество $(A \cap B) \cup (C \cap D)$.

Ответ: $(A \cap B) \cup (C \cap D) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

П р и м е р ы (с использованием кругов Эйлера)



Упражнения. Доказать (с помощью кругов Эйлера), что:

1. $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

2. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.

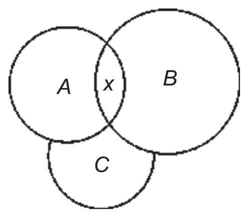
3. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

4. $A \backslash (A \backslash B) = (A \cap B)$.

Частный случай разности множеств — операция дополнения множества до универсума. Дополнением множества A до универсума U называется множество $\overline{A}$, состоящее из всех элементов U, которые не принадлежат множеству A, т.е. разность множеств U/A.

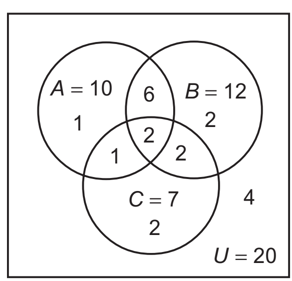
Примеры

1. Из 22 человек студенческой группы по результатам психологического теста 11 человек оказались веселого характера, 14 — находчивыми и 6 не показали себя ни веселыми, ни находчивыми. Сколько человек имели одновременно веселый и находчивый характер?



Пусть A — множество студентов веселого характера, B — находчивого, C — не обладающих веселым или находчивым характером. Из рисунка ясно, что количество студентов, которые имеют либо веселый, либо находчивый характер, равно $22 - 6 = 16$. Обозначим через x количество студентов веселого и находчивого характера, тогда $16 = 11 + 14 - x$. Отсюда $x = 9$.

2. В СИЗО находится 20 человек. Из них 10 человек задержаны по статье A, 12 — по статье B и 7 — по статье C. Известно также, что по статьям A и B в СИЗО находятся 8 человек, по статьям A и C — 3 человека, B и C — 4 человека, а 2 человека — по трем статьям. Сколько человек задержано: а) по двум статьям; б) только по одной статье; в) по другим статьям?



Для решения воспользуемся графической моделью задачи. Используя описанные ситуации, необходимо выделить основное множество U, о котором идет речь в задаче (множество всех людей, находящихся в СИЗО), найти все его подмножества (подмножества A, B, C — множества людей, задержанных по соответствующим статьям), выяснить взаимосвязь между ними и построить соответствующую графическую иллюстрацию — диаграмму Эйлера).

Сначала находим количество людей, задержанных только по статьям A и B : 8 — 2 = 6; только по статьям A и C : 3 — 2 = 1; только по статьям B и C : 4 — 2 = 2. Тогда ровно по двум статьям задержано 6 + 2 + 1 = 9 человек. Условие задачи позволяет теперь определить число элементов в каждом из подмножеств, изображаемых криволинейными областями внутри кругов (только по статье A : 10 — 6 — 2 — 1 = 1; только по статье B : 12 — 6 — — 2 — 2 = 2; только по статье C : 7 — 1 — 2 — 2 = 2), а затем ответить на другие поставленные вопросы: только по одной статье задержаны 1 + 2 + 2 = 5 человек; по другим статьям в СИЗО находятся 20 — (5 + 9 + 2) = 4 человека.

3. В туристической группе 30 человек, из которых 18 знают английский, 16 — немецкий и 12 — французский языки; 6 человек знают и английский и французский языки; 9 — и немецкий и английский, 5 — и немецкий и французский языки; 2 человека знают все три языка. Сколько туристов не знают ни английского, ни немецкого, ни французского языков?

Примем за U множество всех туристов данной группы. Обозначим A, B, C — множества людей, владеющих хотя бы одним из языков: A — английским; B — немецким; C — французским. Тогда условие и вопрос задачи записываются так:

$$n(U) = 30;\ n(A) = 18;\ n(B) = 16;\ n(C) = 12;\ n(AB) = 9;$$
$$n(AC) = 6;\ n(BC) = 5;\ n(ABC) = 2.$$

Найти $n(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$.

Если изобразить круги Эйлера, то очевидно, что

$$n(A + B + C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(AB) - n(AC) -$$
$$- n(BC) + n(ABC),$$

т.е. $n(A + B + C) = 18 + 16 + 12 - 9 - 6 - 5 + 2 = 28.$

Далее $n(\mathbf{A + B + C}) + n(A + B + C) = n(U)$, откуда

$$n(\mathbf{A + B + C}) = n(U) - n(A + B + C) = 30 - 28 = 2$$

и, наконец, $n(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = n(\mathbf{A + B + C}) = 2.$

Подтвердите полученное решение графически.

У п р а ж н е н и я

1. В туристической группе из 12 человек умеют разводить костер 10 человек, ставить палатку — 7 человек, из которых двое не умеют развести костер. Сколько человек в группе: а) умеют только разводить костер; б) умеют только ставить палатку; в) умеют делать и то, и другое; г) не умеют делать ни того, ни другого?

2. В группе из 32 студентов увлекаются компьютерными играми 21 человек, музыкой — 18 человек и не увлекаются ни тем, ни другим 4 человека. Сколько студентов в группе увлекаются: а) только компьютером; б) только музыкой; в) и тем, и другим; г) хотя бы чем-то одним?

3. На кафедре иностранных языков работают несколько преподавателей. Из них 7 человек преподают английский язык, 6 — немецкий язык и 5 — французский; 4 работника кафедры преподают английский и немецкий языки, 3 — немецкий и французский, 2 — французский и английский, 1 — все три языка. Сколько человек работает на кафедре? Сколько из них преподают только английский язык? Только французский язык?

Ответ: **1**. а) 5; б) 2; в) 5; г) 0. **2**. а) 10; б) 7; в) 11; г) 28. **3**. 10; 2; 1.

2.2. Множества и отношения

Центральное место занимает *теория отношений*, которая оказалась простым и удобным аппаратом для решения различных задач. На ее основе обобщается понятие функции, применимое не только к числовым множествам, но и к множествам объектов любой природы. В самом общем смысле отношение означает какую-либо связь между предметами или понятиями (рис. 5).

Отношения		
Унарные (одноместные)	Бинарные (двуместные)	*n*-мерные (многоместные)

⇩

Эквивалентность	Упорядоченность	Толерантность

Рис. 5

Отношения между парами объектов называют *бинарными* (двуместными). Например, отношения принадлежности $\alpha \in A$ и включения $A \subset B$. Первое из них определяет связь между множеством и элементами, а второе — между двумя множествами. Примерами бинарных отношений являются равенство (=), неравенства (< или ≤), а также такие выражения, как «быть братом», «делиться (на какое-то число)», «входить в состав (чего-либо)» и др.

Примеры

1. Отношение ≤ выполняется для пар (5, 7) и (5, 5), но не выполняется для пары (7, 5).

2. Отношение «иметь общий делитель, отличный от единицы», выполняется для пар (4, 2), (6, 9), но не выполняется для пары (7, 8).

3. Отношения на множестве людей: «быть знакомым», «быть сыном», «учиться в одном вузе».

СПОСОБЫ представления отношений
Сечения (фактор-множество)
Матрица отношений (таблица)
Граф отношений (стрелки)

ОПЕРАЦИИ над ними
Все теоретико-множественные
Обращение (симметризация)
Композиция

Общие свойства отношений. Отношение может быть:

• *рефлексивно* (от лат. *reflexivus* — повернутый назад, т.е. если каждый элемент множества связан этим отношением сам с собой, например: равенство, равновеликость, ≤, ≥, самообслуживание, «иметь общий делитель») или *антирефлексивно* (<, >, «быть старше»);

• *симметрично* (равенство, равновеликость, расстояние между двумя точками, «быть братом»), *антисимметрично* (нестрогое неравенство, включение) или *асимметрично* (строгое включение, «быть отцом») [если отношение асимметрично, то оно и антирефлексивно];

• *транзитивно* (от лат. *transeo* — перехожу: равенство, ≤, «быть делителем», «быть родственником»).

Особо выделяются три типа бинарных отношений: *эквивалентность*, *упорядоченность* и *толерантность*, которые наиболее часто встречаются на практике.

1. Отношение ***эквивалентности*** представляет собой экспликацию (перевод интуитивных представлений в ранг строгих математических понятий) таких слов, как «одинаковость», «неразличимость», «взаимозаменяемость», это совокупность всех элементов, эквивалентных данному. Другими словами, отношение эквивалентности является обобщением понятия равенства. Ясно, что в реальности тождественных элементов не бывает. Наоборот, каждый элемент наделен индивидуальными признаками, среди которых имеются как существенные, так и несущественные.

Эквивалентность можно рассматривать как совпадение элементов только по части (существенных) признаков. Эквивалентность удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности, транзитивности и обычно обозначается знаком «~». Свойства эквивалентности записывают следующим образом: 1) $x \sim x$ (рефлексивность); 2) если $x \sim y$, то $y \sim x$ (симметричность); 3) из $x \sim y$ и $y \sim z$ следует $x \sim z$ (транзитивность).

Важнейшее значение эквивалентности состоит в том, что это отношение определяет признак, который допускает *разбиение* множества на непересекающиеся подмножества, называемые *классами эквивалентности* (рис. 6). Наоборот, всякое разбиение множе-

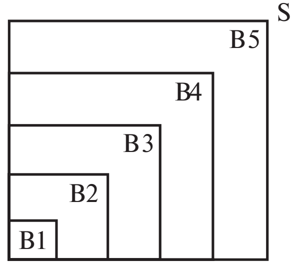


Рис. 6

ства на непересекающиеся подмножества определяет между элементами этого множества некоторое отношение эквивалентности. Другими словами, задание на исследуемом множестве объектов отношения эквивалентности позволяет эти объекты определенным образом классифицировать, т.е. относить каждый конкретный объект к той или иной группе (классу). У этой процедуры есть название — «операция факторизации», а сам результат называется «фактор-множество».

Например, отношение «проживать в одном доме» в множестве жителей города является эквивалентностью и разбивает это множество на непересекающиеся подмножества людей, являющихся соседями по дому. Примерами отношений эквивалентности могут служить подобие или равенство треугольников на плоскости, параллельность прямых, утверждение «быть таким же» и др.

Множество слов в русском языке можно разбить на классы эквивалентности: по первой букве (именно так составляются словари), по количеству букв и т.д. Множество студенческих групп является фактор-множеством, получаемым в результате введения на множестве студентов данного курса отношения эквивалентности (студент $a \sim$ студент b, если они из одной группы). Если отношение эквивалентности на множестве студентов строится по результатам сдачи экзаменов, то соответствующий фактор множество строится из четырех элементов: {2}, {3}, {4}, {5}.

2. Отношение ***порядка*** обладает свойствами транзитивности и антисимметричности (табл. 1). Если между элементами множества может быть установлено отношение «старшинства», «важности», «первичности» или «предшествования», говорят об *упорядоченном* множестве. Например, студенты какой-либо группы могут быть упорядочены по возрасту, успеваемости, алфавиту. Примером абсолютно

неупорядоченного множества является набор монет одинакового достоинства в кошельке.

Если между любыми тремя элементами множества a, b, c установлено отношение $a < b$, $b < c$, из которого следует, что $a < c$, множество называют линейно упорядоченным. Например, *линейно упорядоченными* являются точки прямой, отрезка, произвольной кривой линии.

Таблица 1

Порядок	Свойства отношений порядка (иерархии)
Строгий ($x < y$)	Антирефлексивность Асимметричность Транзитивность
Нестрогий ($x \leq y$)	Рефлексивность Антисимметричность Транзитивность

Различают отношение *нестрогого* порядка (оно рефлексивно), например отношения «быть не старше» на множестве людей, «быть не больше» на множестве натуральных чисел, и отношение *строгого порядка* (оно антирефлексивно), например отношения «быть прямым потомком», «быть моложе» на множестве людей, результаты жеребьевки.

Множество, на котором задано отношение порядка, может быть *полностью упорядоченным* (если любые два элемента сравнимы по отношению порядка) или, в противном случае, *частично упорядоченным*. Например, отношение «быть не старше» задает полный порядок на множестве людей; отношение «быть начальником» задает на множестве сотрудников организации частичный порядок, так как, например, для пары сотрудников одного отдела это отношение не выполняется: они не сравнимы по данному отношению. Линейно упорядоченные множества и полностью упорядоченные обычно понимают как синонимы.

3. Отношение ***толерантности*** удовлетворяет свойствам рефлексивности и симметричности. Для этого отношения, в отличие от эквивалентности, транзитивность не обязательна, и, значит, эквивалентность есть частный случай толерантности. Отношение толерантности представляет собой экспликацию интуитивных представлений о сходстве и неразличимости. Каждый объект неразличим сам с собой (рефлексивность), а сходство двух объектов не зависит от того, в каком порядке они сравниваются (симметричность). В то же время если один объект сходен с другим, а другой сходен с третьим, то это вовсе не означает, что все они обязательно сходны между собой, т. е. свойство транзитивности может не выполняться.

Сходство между различными объектами имеет точный смысл только тогда, если указана совокупность признаков, относительно которой это сходство устанавливается. Два объекта считаются толерантными, если обладают хотя бы одним общим признаком. Например, если определить отношение между словами как наличие хотя бы одной общей буквы, то толерантными будут пересекающиеся слова кроссворда.

Пример. Определив отношение толерантности как сходство между словами из четырех букв, если они отличаются только одной буквой, можно «превратить муху в слона»:

муха — мура — тура — тара — кара — каре — кафе — кафр — каюр — каюк — крюк — крок — срок — сток — стон — *слон*.

Отношение может быть определено не только для пар объектов, но и для троек, четверок и т.д. (n-местное отношение). Примерами трехместных (тернарных) отношений являются: арифметические операции над числами, отношение между родителями и детьми (отец, мать, ребенок). Пропорция $x : y = z : u$ иллюстрирует четырехместное отношение.

Мощность множеств. Пусть X и Y — два произвольных множества. Естественно поставить вопрос о сравнении множеств по числу элементов.

Если множества X и Y конечны, то поставленная задача может быть решена двумя способами.

1. Пересчитаем число элементов в каждом из множеств и сравним результаты. Это позволит установить равенство числа элементов в множествах или указать, в каком из множеств элементов больше. Однако можно поступить иначе.

2. Каждому элементу $x \in X$ поставим в соответствие один, и только один, элемент $y \in Y$.

Если при этом оказывается, что каждый элемент $y \in Y$ ставится в соответствие одному, и только одному, элементу $x \in X$, то говорят, что между элементами множеств X и Y установлено взаимнооднозначное соответствие. Очевидно, что для конечных множеств взаимнооднозначное соответствие можно установить только тогда, когда число элементов в этих множествах одинаково.

Очевидно, что, в то время как первый способ (подсчет числа элементов) возможен лишь для сравнения конечных множеств, второй способ (установление взаимнооднозначного соответствия) в одинаковой мере применим как для конечных, так и для бесконечных множеств.

Ясно, что взаимнооднозначное соответствие двух множеств — это частный случай отображения (функции) одного множества на другое, при котором разным элементам первого множества отвечают разные элементы второго.

Если между множествами X и Y установлено взаимнооднозначное соответствие, то говорят, что эти множества *эквивалентны* (или равномощны), и записывают $X \sim Y$. Отсюда следует, что если два конечных множества эквивалентны, то они равночисленны. Таким образом, понятие эквивалентности множеств есть обобщение понятия равно численности на случай бесконечных множеств.

Приведем пример попарно эквивалентных множеств.

Пусть множество $X = \{1, 2, ..., n, ...\}$, т.е. множество натуральных чисел, а $Y = \{-1, -2, ..., -n, ...\}$, т.е. множество целых отрицательных чисел. Тогда $X \sim Y$, так как между ними устанавливается взаимнооднозначное соответствие.

Как уже отмечалось, отношение эквивалентности множеств рефлексивно, симметрично и транзитивно. Поэтому совокупность всех множеств распадается на *классы* эквивалентных множеств.

Понятие эквивалентности — далеко идущее обобщение понятия равночисленности.

Пусть в множестве X имеется собственное подмножество, равномощное Y, но в Y нет собственного подмножества, равномощного X. Тогда говорят, что *мощность множества* X больше мощности Y.

Например:

1. Множество N всех натуральных чисел имеет бóльшую мощность, чем множество $Y = \{1, 2, 3\}$.

2. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{9, 13, 5\}$.

Рассмотрим собственное подмножество $X_1 = \{1, 2, 3\}$ множества X. Оно равномощно множеству Y. Ни одно из собственных подмножеств множества Y не может быть равномощно всему множеству X. Таким образом, мощность множества X больше, чем мощность множества Y.

Для *конечного множества* его мощность есть число элементов этого множества. Мощность *любого бесконечного множества* больше мощности любого конечного.

Среди бесконечных множеств наименьшей мощностью обладают множество N всех натуральных чисел и все множества, ему равномощные (так называемые счетные множества). Мощность множества R всех действительных чисел (так называемая мощность континуума) больше, чем мощность счетного множества.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Скажите, как называется:

- множество точек плоскости, удаленных от данной точки O на расстояние r;
- множество цветов, стоящих в вазе;
- множество людей, обучающихся в вузе;
- множество букв А, Б, В, Г… .

2. Выпишите все подмножества множества $B = \{1,2,3\}$.

3. Запишите множество A перечислением его элементов. Пусть $A = \{k \in \mathrm{N}: 1{,}4 < k < 8\}$. Здесь N — множество натуральных чисел.

4. Приведите пример квадратного уравнения, множество корней которого является пустым.

5. Пусть A — множество людей, населяющих Европу; B — множество людей, населяющих Азию; C — множество людей, населяющих Евразию. Укажите иерархию этих множеств. В каких из них каждое множество может выступить в роли основного?

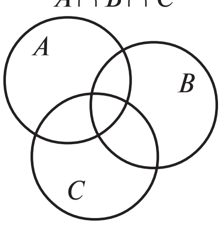
6. Даны два множества: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Запишите множества, представляющие:

- пересечение $A \cap B$;
- объединение $A \cup B$;
- разность $A \setminus B$;
- симметрическую разность $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B}$.

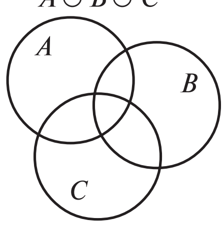
7. Даны два множества: $A = \{1, 3, 5, 7\}$ и $B = \{2, 4, 6\}$. Запишите $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B}$.

8. Даны три множества A, B и C. Покажите (штриховкой) пересечение и объединение трех множеств.

$A \cap B \cap C$



$A \cup B \cup C$

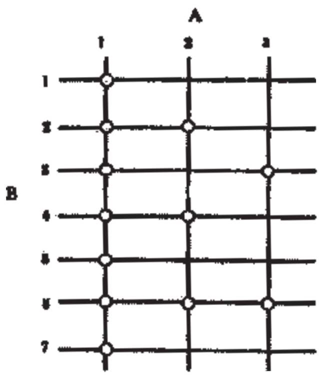


9. Дайте перечень элементов множества, являющегося пересечением двух множеств A и B, где A — множество с критерием принадлежности к понятию «месяц продолжительностью меньше, чем 31 день»; B — множество с критерием принадлежности к понятию «месяц минимум 30 дней».

10. На кафедре иностранных языков работают 22 преподавателя, из которых 13 человек владеют английским языком, 11 — немецким, 4 — какими-то другими языками. Сколько преподавателей кафедры: а) знают только английский язык; б) знают и английский, и немецкий языки?

11. Дайте определение понятию «бинарное отношение». Приведите примеры.

12. Задано отношение y / x на множестве $M = \{y / x$ — целое, $1 \le y \le 7;\ 1 \le x \le 3\}$ (см. рисунок). Построить соответствующую матрицу или таблицу, имеющую A столбцов и B строк, и отметить в ней единицами элементы, удовлетворяющие заданному отношению, а нулями — все остальные. Построить также стрелочную диаграмму отношения y / x.



$x \in$ A

$y \in$ B

13. Каковы свойства отношения эквивалентности? Запишите их.

14. В чем заключается значение эквивалентности?

15. Дана совокупность множеств J; $J = \{A, B, C, D, E, F\}$, где A=$\{1, 2, 3\}$; B=$\{a, b\}$; C=$\{m, n, k\}$; D — множество натуральных чисел; E — множество четных чисел; F — множество нечетных чисел. На сколько классов эквивалентности множеств можно разбить совокупность J?

16. Какие отношения выражает фраза: «Каждый Охотник Желает Знать, Где Сидят Фазаны»?

Число, место и комбинация – три взаимно перекрещивающиеся, но отличные сферы мышления, к которым можно отнести все математические идеи.

Дж. Сильвестр

3. Элементы дискретной математики

Дискретной считают такую величину, возможные значения которой можно пронумеровать.

Комбинаторика — раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Теория графов — область дискретной математики, особенностью которой является геометрический подход к изучению объектов. Хотя в теории графов много результатов, элементарных по своей природе, в ней также громадное изобилие весьма тонких комбинаторных проблем, достойных внимания самых искушенных математиков.

3.1. Элементы комбинаторики

3.1.1. Основные правила комбинаторики

Правило сложения

Если выбор каждого из объектов a_i $(i = 1, 2, ..., k)$ можно выполнить n_i способами, то выбор «или a_1, или a_2 ,..., или a_k» можно произвести $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ способами.

Пример. Из пункта A в пункт B можно добраться самолетом, поездом и автобусом, причем между этими пунктами существуют 2 авиамаршрута, 1 — железнодорожный и 3 — автобусных. Следовательно, общее число маршрутов между пунктами A и B равно $2 + 1 + 3 = 6$.

Правило умножения

Если выбор каждого из k объектов a_i $(i = 1,2,...,k)$ можно осуществить n_i способами, то выбор «и a_1, и a_2 ,..., и a_k» можно произвести $N = \prod_{i=1}^{k} n_i$ способами.

Пример. Сколькими способами можно распределить четыре шара по двум лункам, в которые помещается только один шар? Очевидно, первую лунку можно заполнить четырьмя способами, так как при выборе первой лунки имеется четыре шара. Вторую лунку можно заполнить тремя шарами, так как после заполнения первой лунки осталось три шара.

Заметим, что с каждым из четырех способов заполнения первой лунки может совпасть любой из трех способов заполнения второй лунки. Поэтому общее число способов распределения двух лунок равно 4×3 = 12.

3.1.2. Размещения

Пусть дано множество, состоящее из n элементов. Размещением из n элементов по k ($0 \le k \le n$) элементов называется упорядоченное подмножество, содержащее k различных элементов данного множества. Эти подмножества отличаются друг от друга или составом элементов, или порядком их распределения. Но число элементов во всех этих подмножествах равно k.

Для определения числа A_n^k размещений из n элементов по k учтем, что первый элемент подмножества может быть взят n способами, второй — $(n — 1)$ способом,..., k-й элемент — $(n — (k — 1))$ способами. Отсюда, используя правило умножения, получаем:

$$A_n^k = n(n-1)...(n-(k-1)) =$$

$$= \frac{[n(n-1)...(n-(k-1))\ ][(n-k)...1]}{[(n-k)(\ n-(k+1))\ ...1]} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Здесь $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot(n—1)n$ и $(n—k)! = 1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot(n—k)$.

Условимся считать $0! = 1$, поэтому $A_0^0 = \frac{0!}{0!} = 1$.

Пример. В соревнованиях принимают участие 16 команд. Сколькими способами могут распределиться три первых места, т. е. необходимо найти число всех подмножеств, состоящих из трех элементов, отличающихся составом (номерами команд) или порядком их размещения (подмножества № 1, № 2, № 3 и № 2, № 1, № 3 являются разными).

Здесь имеем дело с размещением. Тогда искомое число

$$A_{16}^{3}=\frac{16!}{(16-3)!}=\frac{16!}{13!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot16}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13}=$$

$$=14\cdot15\cdot16=3360.$$

3.1.3. Перестановки

Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов. Так как каждая перестановка содержит все n элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

Число всех возможных перестановок из n элементов обозначают P_n:

$$P_n=A_n^n=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=n!,\ \text{т.е.}\ P_n=n!.$$

Пример. Сколькими способами можно расставить 6 различных книг на одной полке?

Искомое число способов равно

$$P_6=6!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720.$$

Действительно, первую книгу можно выбрать шестью способами, вторую — пятью способами и т.д., последнюю — одним способом. По правилу умножения общее число способов равно $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$.

3.1.4. Сочетания

Пусть дано множество, состоящее из n элементов. Сочетанием из n элементов по k ($0\le k\le n$) элементов называется любое подмножество, которое содержит k различных элементов данного множества. Таким образом, различными подмножествами считаются только те, которые отличаются составом элементов. Подмножества, отличающиеся друг от друга лишь порядком следования элементов, не считаются различными.

Число всех возможных сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k. Так как число перестановок из k равно $k!$, то число размещений из n элементов по k – A_n^k будет в $k!$ раз больше, чем число сочетаний из n элементов по k — C_n^k, т. е. $A_n^k = k!\,C_n^k$, отсюда $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$.

Пример. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

Так как порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^4 способами:

$$C_{25}^4 = \frac{25!}{(25-4)!\ 4!} = \frac{25!}{21!\ 4!} = \frac{21!\ 22\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{21!\ 4!} = \frac{22\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 12\,650.$$

Упражнения

1. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для посылки письма?

Ответ: 20.

2. Из 9 человек надо выбрать 4 человека и разместить их на четырех занумерованных стульях (по одному человеку на стуле). Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 3024.

3. Сколькими способами можно составить команду из 4 человек для соревнования по бегу, если имеется 7 бегунов?

Ответ: 35.

4. Сколькими способами можно обить 6 стульев тканью, если имеются ткани шести различных цветов и все стулья должны быть разного цвета?

Ответ: 720.

3.2. Элементы теории графов

Происхождение графов. Многие задачи сводятся к рассмотрению совокупности объектов, существенные свойства которых описываются связями между ними. Например, глядя на карту автомобильных дорог, можно интересоваться только тем, имеется ли связь между некоторыми населенными пунктами, отвлекаясь от конфигурации и качества дорог, расстояний и других подробностей. Интерес могут представлять связи и отношения между людьми, событиями, состояниями и вообще между любыми объектами.

В подобных случаях удобно рассматриваемые объекты изображать точками, называемыми *вершинами*, а связи между ними — линиями (произвольной конфигурации), называемыми *ребрами*. Множество вершин, связи между которыми определены множеством ребер, называют *графом*.

Первая работа по графам была опубликована 20-летним Леонардом Эйлером в 1736 г., когда он работал в Российской академии наук. Она содержала решение задачи о кёнигсбергских мостах (рис. 7): можно ли совершить прогулку таким образом, чтобы, выйдя из любого места города, вернуться в него, пройдя один раз по каждому мосту? С тех пор поток задач с применением графов нарастал подобно снежной лавине. Наряду с многочисленными головоломками и играми на графах, рассматривались проблемы, многие из которых требовали использования математических методов. Уже в середине XIX в. Кирхгоф применил графы для анализа электрических цепей.

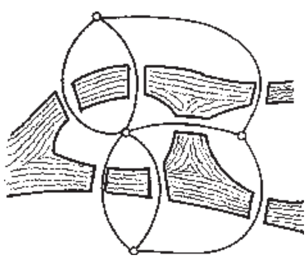


Рис. 7

Однако теория графов как математическая дисциплина сформировалась только к середине 30-х годов XX в. Теория графов располагает мощным аппаратом решения прикладных задач из различных областей науки и техники. Сюда относятся, например, анализ и синтез цепей и систем, сетевое планирование и управление, исследование операций, выбор оптимальных маршрутов и потоков в сетях, моделирование жизнедеятельности организмов, исследование случайных процессов и многие другие задачи. Теория графов тесно связана с разделами математики: теорией множеств, теорией матриц, математической логикой и теорией вероятностей. В разделах графы применяют для представления различных математических объектов, и в то же время сама теория графов широко использует аппарат родственных разделов математики.

Ориентированные графы. Часто связи между объектами характеризуются вполне определенной ориентацией. Например, на некоторых улицах допускается только одностороннее автомобильное движение, отношения между людьми могут определяться подчиненностью или старшинством. Ориентированные связи характеризуют переход системы из одного состояния в другое, результаты встреч между командами в спортивных состязаниях, отношения между числами (неравенство, делимость). Для указания направления связи между вершинами графа соответствующее ребро отмечается стрелкой. Ориентированное таким образом ребро называют *дугой*, а граф с ориентированными ребрами — *ориентированным графом.*

Взвешенные графы. Дальнейшее обобщение отображения связей между объектами с помощью графов состоит в приписывании ребрам и дугам некоторых количественных значений, качественных признаков или характерных свойств, называемых *весами.* В простейшем случае это может быть порядковая нумерация ребер и дуг, указывающая на очередность при их рассмотрении (приоритет или иерархия). Вес ребра или дуги может означать длину (пути сообщения), количество набранных очков (турниры), характер отношений между людьми (сын, брат, отец, подчиненный, учитель) и т.д. Вес можно приписывать не только ребрам и дугам, но и вершинам. Например, вершины, соответствующие населенным пунктам на карте автомобильных дорог, могут характеризоваться количеством мест в кемпингах, пропускной способностью станций техобслуживания. Вообще, вес вершины означает любую характеристику соответствующего ей объекта (цвет изображаемого вершиной предмета, возраст человека и др.).

Типы конечных графов. Если множество вершин графа конечно, то он называется *конечным графом*. Для ориентированного ребра (дуги) различают *начальную вершину*, из которой дуга исходит, и *конечную вершину*, в которую дуга заходит. Ребро, граничными вершинами которого является одна и та же вершина, называется *петлей*. Ребра с одинаковыми граничными вершинами параллельны и называются *кратными*. В общем случае граф может содержать *изолированные вершины*, которые не являются концами ребер и не связаны между собой или с другими вершинами.

Маршруты. Нередко задачи на графах требуют выделения различных маршрутов, обладающих определенными свойствами и характеристиками. *Маршрут* длины m определяется как последовательность m ребер графа (не обязательно различных), таких, что граничные вершины двух соседних ребер совпадают. *Замкнутый маршрут* приводит в ту же вершину, из которой он начался. Маршрут, все ребра которого различны, называется *цепью*, а маршрут, для которого различны все вершины, — *простой цепью*. Замкнутая цепь называется *циклом*, а простая цепь —

простым циклом. Маршрут, не содержащий повторяющихся дуг, называется *путем*, а маршрут, не содержащий повторяющихся вершин, — *простым путем*. Замкнутый путь называется *контуром*, а простой замкнутый путь — *простым контуром*. Граф называется *циклическим (контурным)*, если он содержит хотя бы один цикл (контур).

Деревья и лес. Особый интерес представляют связные ациклические графы, называемые *деревьями* (рис. 8). Дерево на множестве p вершин всегда содержит $q = p - 1$ ребер, т.е. минимальное количество ребер, необходимое для того, чтобы граф был связным. Действительно, две вершины связываются одним ребром, и для связи каждой последующей вершины с предыдущими требуется ребро, следовательно, для связи p вершин необходимо и достаточно $p - 1$ ребро. При добавлении в дерево ребра образуется цикл, а при удалении хотя бы одного ребра дерево распадается на компоненты, каждая из которых представляет собой также дерево или изолированную вершину. Несвязный граф, компоненты которого — деревья, называется *лесом*.

Примерами древовидной структуры являются генеалогический граф (родословное дерево), а также совокупность всех файлов, размещенных на же-

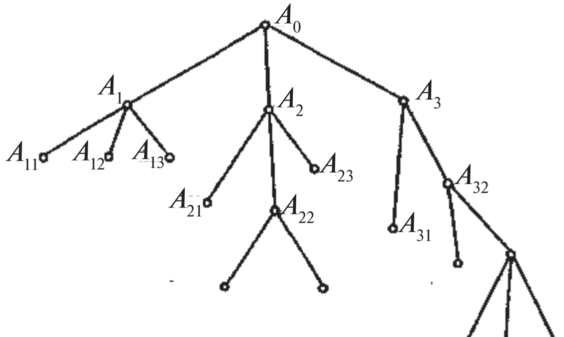


Рис. 8

стком диске компьютера или на дискете. Логический диск имеет каталог и называется *главным*, или *корневым*. Он имеет оглавление, подобное оглавлению книги. В оглавлении корневого каталога перечислено содержимое диска: имена файлов этого каталога и других каталогов, вложенных в него.

Решение многих задач для графов с конечным множеством вершин и ребер может быть выполнено с помощью полного перебора всех допустимых вариантов. Однако таким способом удается решить задачу только для графов с небольшим числом вершин и ребер. Поэтому существенное значение для теории графов имеет построение эффективных алгоритмов, находящих точное или приближенное решение.

Результаты и методы теории графов применяются при решении транспортных задач о перевозках, для выделения «узких мест» при планировании и управлении разработок проектов, при моделировании сложных технологических процессов, в построении различных дискретных устройств, в программировании и т.д.

Пример. *Задача коммивояжера* — объехать n городов, побывать в каждом ровно по одному разу, при этом потраченное им время должно быть минимальным. Время, за которое проходится расстояние между любой парой городов, задано. Может быть задано расстояние между городами. В этом случае требуется найти кратчайший путь, проходящий по одному разу через все города с возвратом в начальный путь.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Как называются числовые множества на замкнутом и открытом промежутках? Запишите их в символах теории множеств и изобразите на числовой оси.

2. Вычислите $n!$ при $n = 1, 2, ..., 8$.

3. Сколькими способами можно распределить между четырьмя отпускниками 4 путевки в различные дома отдыха?

4. Из 10 рабочих нужно выделить 4 для определенной работы. Сколькими способами это можно сделать?

5. Сколько различных двухзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, если каждую цифру в двухзначном числе можно использовать лишь один раз?

6. Каким образом основные свойства отношений (симметричность, рефлексивность и транзитивность) можно изобразить с помощью графов?

7. В чем заключается задача коммивояжера?

8. Нарисуйте фрагмент (три поколения) генеалогического графа (родословного дерева) гипотетической семьи.

9. Многие информационные системы построены по принципу дерева. Изобразите типичную структуру файловой системы.

Высшее назначение математики – находить порядок в хаосе, который нас окружает.

Н. Винер

4. Элементы математической логики

Начало науки о законах и формах мышления связывают с именем Аристотеля. Прошло два тысячелетия, прежде чем Г. Лейбниц предложил ввести в логику математическую символику и использовать ее для общих логических построений. Эту идею последовательно реализовал в XIX в. Дж. Буль и тем самым заложил основы математической (символической) логики.

4.1. Сущность математической логики

Логика является началом любой научной теории. Даже в Библии сказано, что «сначала было слово». Логика как наука о способах мышления, приводящих к истине, возникла в глубокой древности. Ее основы заложены древнегреческими философами — Перменидом, Зеноном, Протагором, Сократом, сведения о которых дошли до нас благодаря Платону. Им были также выявлены некоторые принципы и схемы рассуждений (отчасти). Но только Аристотель решительно отделил их от содержания рассуждений и создал чистую систему силлогизмов — правил вывода, что привело к возникновению теории логики.

Правила вывода позволяют преобразовывать исходные утверждения, подобно тому как тождественные преобразования в математике дают возможность решать различные системы уравнений. Следующим шагом формализации логики являлось появление специальной символики для точной и компактной записи утверждений и определения операций над ними.

Идея перенесения тех методов, которые обычно применяются в математике, на логику постепенно реализуется Б. Паскалем (1623—1662), Г. Лейбницем, Дж. Булем (1815—1864), О.де Морганом (1806—1871), Г. Фреге (1848—1925), Б. Расселом (1872—1970), Д. Гильбертом, А. Марковым (1903—1979) и др. Так появился язык математической логики как логическое продолжение языка математики.

Языковыми формами этого языка являются математические понятия — абстрактные объекты. В отличие от объектов реального мира, абстрактные объекты лишены материальной сущности. Например, бильярдный шар, лишенный материальной сущности, — это бесконечное множество точек трехмерного евклидова пространства, расстояние которых до некоторой особой точки не превышает величины R — радиуса этого шара. Из таких математических объектов можно строить объекты, процессы и явления реального мира.

Получаемые при этом подобия называют математическими моделями. Компьютер «оживляет» эти подобия, и они начинают вести себя в некотором замкнутом пространстве (в единичном гиперкубе, который создается устройством памяти компьютера) подобно тому, как ведут себя в реальном мире исследуемые объекты, процессы и явления. При этом без риска исследователь может осуществлять любые эксперименты над этими подобиями. Результаты экспериментов не выйдут за пределы замкнутой компьютерной памяти, не потревожат экологическую систему реального мира и его обитателей. Исследователь лишь получит ответ на вопрос: что в действительности может произойти, если...?

С появлением языка математической логики стало возможным составлять алгоритмы логического вывода. Заговорили о создании «искусственного интеллекта», и встал вопрос: нельзя ли создать универсальный алгоритм логического вывода (суперинтеллект), позволяющий доказать или опровергнуть любое утверждение? В свое время такой суперинтеллект пытались создать Б. Паскаль, Г. Лейбниц. Программа Д. Гильберта была последней попыткой реализации этого универсального алгоритма, но и она закончилась неудачей. Оказалось, что создание такого суперинтеллекта невозможно даже теоретически. В 1931 г. австрийский математик Курт Гёдель доказал, что всякая достаточно богатая формальная система не полна, т.е. в ней найдутся содержательно истинные утверждения, не доказуемые в этой системе.

В последние десятилетия логика находит все более широкое применение в технике при исследовании и разработке вычислительных машин, дискретных автоматов. Ее методы используются в теории преобразования и передачи информации, теории вероятностей и комбинаторном анализе. Математическая логика начинает внедряться в такие нематематические области, как экономика, биология, медицина, психология, языкознание, право. Интенсивно развиваются специальные разделы математической логики, призванные обслуживать конкретные области науки и техники.

Столь энергичный выход математической логики за пределы математики объясняется тем, что ее аппарат легко распространяется на объекты самой общей природы, необходимо лишь, чтобы они характеризовались конечным числом состояний.

Двузначная логика имеет дело с объектами, которые принимают одно из двух возможных значений (истинное или ложное высказывание, наличие или отсутствие заданного признака у объекта и др.). Объекты, которые могут принимать значения из конечного множества, содержащего больше двух элементов, называют *многозначными*. Они либо сводятся каким-нибудь способом к двузначным объектам, либо обслуживаются аппаратом *многозначной логики*.

Устоявшееся представление о математической логике как науке, изучающей законы мышления с применением аппарата математики главным образом для нужд самой математики, в современных условиях становится слишком узким. С расширением областей применения и дальнейшим развитием математической логики изменяется и взгляд на нее. Объектами математической логики являются любые дискретные конечные системы, а ее главная задача — структурное моделирование таких систем.

4.2. Особенности математической логики

Математическая логика сделала возможным совершенствование аксиоматического метода и сама совершенствовалась с помощью этого метода.

Термин «математическая логика» может быть истолкован двояко. С одной стороны, эта отрасль науки строится как математическая теория, в ней используются математические методы, т.е. в этом смысле она представляет собой «математику логики». С другой стороны, разрабатывая точный логический язык математики, она служит «логикой математики». Тщательный анализ соотношения предметов математики и логики связан с глубокими философскими проблемами и не может быть предметом нашего рассмотрения.

Одна из характерных особенностей математической логики — использование математического языка символов и формул.

В математическом языке, так же как в обычном, мы пользуемся именами предметов, т. е. условными языковыми выражениями, которыми обозначаются эти предметы, различая при этом имя предмета и сам предмет, обозначаемый этим именем. Так, мы отличаем число «пять» как общее свойство (инвариант) класса множеств, эквивалентных, например, множеству пальцев человеческой руки, от слова «пять», которым это число обозначается на русском языке, от английского «*five*», от знаков «5», «101», «V» и др., которыми оно обозначается в различных системах нумерации.

Язык хорошо приспособлен к точному описанию некоторой области предметов, если в нем: 1) для каждого предмета, свойства предмета и отношения между предметами этой области есть имя; 2) различные предметы, свойства, отношения имеют различные имена. Если не выполняется первое условие, то язык беден, недостаточен для описания данной области предметов; если не выполняется второе условие, то язык оказывается двусмысленным. Такой двусмысленностью в силу различных, исторически обусловленных причин обладают естественные языки. Наличие омонимов (одинаковых слов), служащих именами различных предметов (коса, лук и т.д.), нарушает условие 2). Математический язык является результатом усовершенствования обычного языка, в частности устраняет двусмысленность.

К языку обычно не предъявляется требование обозначать различные предметы различными именами, т.е. разрешаются синонимы. Это относится и к математическому языку. Можно, например, считать, что «1 + 2» и «3» — различные имена одного и того же числа.

В элементарной алгебре буквами обозначают в основном числа. В логике буквами обозначаются логические объекты, например предложения. Под предложением понимают то, что обычно понимают под этим термином в грамматике любого естественного языка, а именно языковое выражение или соединение слов, имеющее самостоятельный смысл.

В процессе рассуждения (не только в математике) мы из одних предложений формируем другие, преобразуя их с помощью частицы *не* или соединяя их с помощью союзов *и*, *или*, *если...*, *то*, *если и только если* и др., обозначающих логические связи между предложениями. Для выяснения структуры сконструированных таким образом сложных предложений удобно исходные предложения обозначать буквами, отвлекаясь от их конкретного содержания.

Одна из особенностей математического языка состоит в применении переменных различных типов, благодаря чему такой язык способен выражать абстрактные формы, которые могут заполняться конкретным содержанием. Понятие это всем нам хорошо знакомо — с ним мы часто встречаемся, заполняя различные стандартные бланки.

Под переменной мы понимаем символ, вместо которого можно подставить имена элементов некоторого множества. Предметы, имена которых разрешается подставить вместо переменной, называют ее *значениями*, а множество этих предметов — *областью значений* этой переменной.

В элементарной алгебре используется один тип переменных, а именно переменные, значениями которых служат числа; такие переменные называют *числовыми переменными*. С помощью этих переменных, имен конкретных чисел и знаков операций образуются формы, которые при подстановке вместо переменных их значений обращаются в числа.

Предложение, относительно которого имеет смысл говорить, что его содержание истинно или ложно, будем называть *высказыванием*. Предложение, содержащее переменную, не является высказыванием. Например, «$x < 3$», очевидно, не является высказыванием, так как не имеет смысла говорить, что оно истинно или ложно. Если на место переменной x подставить какое-нибудь число (ее значение), то получим высказывание, истинное или ложное, — в зависимости от того, какое число подставлено.

В математической логике используются также типы переменных, значениями которых являются не числа, а логические объекты, например высказывания. Потребность в использовании таких переменных возникает в логике, например, при выяснении вопроса о следовании одного сложного высказывания из другого.

Под сложным высказыванием понимают высказывание, допускающее расчленение его на другие высказывания. Если никакая часть высказывания сама уже не является высказыванием (или, по крайней мере, не рассматривается как таковое), то его называют *элементарным*.

Совокупность и порядок логических связей (или операций), с помощью которых сложное высказывание образовано из элементарных, составляют логическую структуру сложного высказывания. Операции над высказываниями являются предметом наиболее элементарной части математической логики, называемой логикой (или алгеброй) высказываний.

Термины «логика высказываний» и «алгебра высказываний» можно использовать как синонимы, обозначающие одну и ту же часть логики с разных точек зрения: это и логика (по своему предмету), и алгебра (по своему методу). Чтобы различать эти два построения, для первого сохранено название «логика (алгебра) высказываний», а для второго используется (применяется) термин «исчисление высказываний».

В табл. 3 приводятся символы, обозначающие некоторые логические операции.

Таблица 3

Символ	*Название символа, смысл*	*Как следует читать*
$\neg$	Отрицание	$\neg p$ не p
$\Rightarrow$	Импликация (логическое следствие)	$p \Rightarrow q$ если p, то q
$\Leftrightarrow$	Эквивалентность	$p \Leftrightarrow q$ p тогда и только тогда, когда q
$\wedge$	Конъюнкция (логическое произведение)	$p \wedge q$ p и q
$\vee$	Дизъюнкция (логическая сумма)	$p \vee q$ p или q
$\forall$	Квантор всеобщности[1]	$\forall x\, P(x)$ для всякого (для каждого) x, обладающего свойством $P(x)$
$\exists$	Квантор существования[2]	$\exists\, x \in X$ существует элемент x множества X

[1] От англ. *all* — любой
[2] От англ. *existence* — существование

Для проведения доказательств применяют так называемые *истинностные таблицы* (табл. 4, 5):

Таблица 4

p	$\neg p$
истина	ложь
ложь	истина

Таблица 5

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
истина	истина	истина	истина	истина	истина
истина	ложь	ложь	истина	ложь	ложь
ложь	истина	ложь	истина	истина	ложь
ложь	ложь	ложь	ложь	истина	истина

Из приведенных в таблицах результатов здравому смыслу противоречат только результаты импликации $p \Rightarrow q$. Поясним содержание следующим примером:

«Если идет дождь (p), дороги влажные (q)» — импликация $p \Rightarrow q$ — истинна, что отражено в первой строке таблицы.

«Если идет дождь (p), дороги сухие ($\neg q$)» — ложному q соответствует, согласно второй строке, ложная импликация.

«Если нет дождя ($\neg p$), дороги влажные (q)» — q — истинно, и импликация — истинна, если дороги, например, политы.

«Если нет дождя ($\neg p$), дороги сухие ($\neg q$)» — согласно четвертой строке импликация истинна.

Упражнение. Поясните результаты импликации $p \Rightarrow q$, приняв p — солнце встало, q — на улице светло.

Некоторые тождественно истинные формулы соответствуют важным логическим законам. В частности, формула $p \vee \neg p \equiv$ *истина* выражает один из основных законов классической логики — *закон исключенного третьего*: всякое суждение либо истинно, либо ложно, «третьего не дано» (по латыни *tertium non datur*). Именно этот закон делает четким язык логики, но он же и обедняет ее, лишив третьей возможности (ни «да», ни «нет», а «может быть»).

Формула $p \wedge \neg p \equiv$ *ложь* выражает другой важнейший закон логики — *закон противоречия*: никакое суждение не может быть истинным и ложным одновременно. Например, если мы говорим об одном и том же человеке «он виновен» и «он не виновен», то очевидно, что одна из этих фраз ложна и, значит, ложно все высказывание. Оба этих закона сформулированы еще Аристотелем.

Закон *двойного отрицания* $\neg(\neg p) \equiv p$ отмечает, что отрицать отрицание какого-либо высказывания —

то же, что утверждать это высказывание. «Неверно, что завтра не будет дождя» — все равно, что «Завтра будет дождь».

Существует много других теорем (законов) равносильности, например: законы поглощения; законы де Моргана; законы идемпотентности (от лат. *idem* — «то же самое» и *potentia* — «степень»). С их помощью можно производить тождественные преобразования формул, т.е. переходить от одних формул к другим, равносильным, аналогично тому, как производятся тождественные преобразования в элементарной алгебре. Например, вместо выражения $p \vee (\neg p \wedge q)$ можно записать $p \vee q$ на основании закона поглощения.

Примеры

1. Доказать (с помощью истинностных таблиц) закон ложного положения $p \Rightarrow q \Leftrightarrow (\neg q) \Rightarrow (\neg p)$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
истина	истина	ложь	ложь	*истина*	*истина*
истина	ложь	ложь	истина	*ложь*	*ложь*
ложь	истина	истина	ложь	*истина*	*истина*
ложь	ложь	истина	истина	*истина*	*истина*

2. Проверить с помощью истинностных таблиц тождество: $p \wedge (p \vee q) = p$.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	p
истина	истина	истина	*истина*	*истина*
истина	ложь	истина	*истина*	*истина*
ложь	истина	истина	*ложь*	*ложь*
ложь	ложь	ложь	*ложь*	*ложь*

Упражнение. Проверьте с помощью истинностных таблиц следующее тождество: $p \vee (\neg p) \wedge q = p \vee q$.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Запишите (для $\wedge$ и $\vee$) закон поглощения и перестановочный (коммутативный) закон.

2. В чем суть закона противоречия и закона исключенного третьего.

3. Докажите один из законов поглощения: $p \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$.

4. Докажите справедливость законов де Моргана:

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q;$$
$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q.$$

5. Докажите, что приведенные ниже формулы всегда истинны:

$$(((p \vee (q \wedge r)) \vee (\neg q)) \vee (\neg p));$$
$$p \wedge q \Rightarrow p \vee q.$$

Десять страниц математики понятой лучше ста страниц, заученных на память и непонятых, а одна страница, самостоятельно проработанная, лучше десяти страниц, понятых отчетливо, но пассивно.

Д. Юнг

5. Основы линейной алгебры

Линейная алгебра – часть алгебры, изучающая векторные (линейные) пространства и их подпространства, линейные отображения (операторы), линейные и квадратичные функции на векторных пространствах. Исторически первым разделом линейной алгебры была теория линейных уравнений. В связи с решением систем линейных уравнений возникло понятие определителя. В 1750 г. были получены формулы Крамера. В связи с изучением систем линейных уравнений и определителей появилось понятие матрицы.

5.1. Определители

Определителем второго порядка называется число, которое вычисляется из таблицы, состоящей из четырех чисел, расположенных в двух строках и двух столбцах, по следующему правилу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Примеры

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 10 - 12 = -2.$

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - (-6) \cdot 4 = -2 + 24 = 22.$

Обратим внимание на то, что в выражении определителя сомножителями в каждом из произведений служат числа, стоящие в *разных строках* и в *разных столбцах.*

Упражнения

Вычислить определители второго порядка:

1. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; **2**. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$; **3**. $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$; **4**. $\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; **5**. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Ответ: **1**. 2; **2**. 6; **3**. -1; **4**. 0; **5**. 7.

Существуют определители третьего и более высоких порядков. Не вникая в подробности, покажем, как *раскрывается* определитель третьего порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - gec - hfa - dbi.$$

Такой алгоритм вычисления определителя называют правилом треугольника (или правилом Саррюса). Схема этого правила приведена на рис. 9.

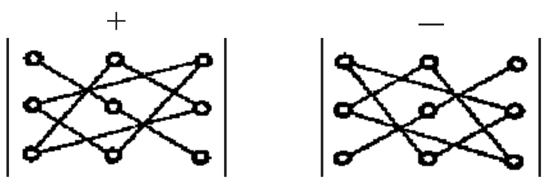


Рис. 9

Примеры

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot5\cdot3 + 2\cdot3\cdot3 + 2\cdot4\cdot1 - 3\cdot5\cdot1 -$

$- 4\cdot3\cdot3 - 2\cdot2\cdot3 = 45 + 18 + 8 - 15 - 36 - 12 = 8.$

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot6 + 2\cdot4\cdot(-2) + 0\cdot5\cdot(-1) -$

$-(-2)\cdot3\cdot(-1) - 5\cdot4\cdot1 - 0\cdot2\cdot6 = -24.$

3. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 4 \cdot 3 -$

$- 2 \cdot 1 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 5 = -1.$

Если этот алгоритм не совсем понятен, то можно попробовать другой способ вычисления определителей. Прежде всего, из исходной таблицы получим расширенную таблицу путем приписывания 1-го и 2-го столбцов в качестве 4-го и 5-го столбцов. Тогда определитель равен сумме всех произведений элементов, стоящих на отмеченных диагоналях. Диагонали, направленные вниз, дают слагаемые со знаком «+», а направленные вверх — со знаком «—» (рис. 10):

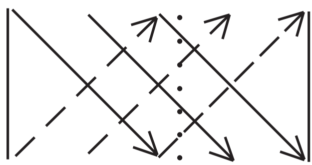


Рис. 10

Легко убедиться, что оба алгоритма приводят к одинаковым результатам, так как в расчетах участвуют, естественно, те же элементы.

Примеры

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 1 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 -$

$- 7 \cdot 5 \cdot 3 - 8 \cdot 6 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 1 = 183 - 189 = -6.$

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) \cdot 2 +$

$+ 0 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 5 = -1.$

3. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow \left|\begin{array}{ccc:cc} 2 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 4 & 4 & -1 \end{array}\right| = 2 \cdot (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 3 \cdot 4 +$

$+ (-2) \cdot 1 \cdot (-1) - 4 \cdot (-2) \cdot (-2) - (-1) \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 0.$

Упражнения

Вычислить определители третьего порядка:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; **2**. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; **3**. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; **4**. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$; **6**. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$; **7**. $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; **8**. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: **1**. 1; **2**. 15; **3**. 27; **4**. –24; **5**. 3; **6**. 2; **7**. 0; **8**. –1.

Определители обладают рядом замечательных свойств (они приводятся в учебниках по линейной алгебре). Например, при перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет только знак; определитель равен нулю, если две строки (столбца) определителя пропорциональны.

5.2. Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера

Рассмотрим, для примера, систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1; \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases}$$

Определитель второго порядка, составленный из коэффициентов при неизвестных,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*.

Правило Крамера применяется к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), у которых число уравнений равно числу неизвестных, а определитель системы не равен нулю. Единственное решение находится следующим образом: значение каждого из неизвестных равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числитель получается из определителя системы заменой столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных членов. Тогда, например, для системы трех уравнений с тремя неизвестными решение находят по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta};\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta};\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta};$$

для системы двух уравнений с двумя неизвестными —

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta};\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Здесь $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix};\ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$

Примеры

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 3y = 12; \\ 2x - y = 7. \end{cases}$$

Вычисляем определитель системы Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 6 = -11 \neq 0.$$

Составляем определители Δ_x и Δ_y путем замены столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных членов:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -12 - 21 = -33; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 35 - 24 = 11.$$

Найдем значения x и y по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-33}{-11} = 3; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{11}{-11} = -1.$$

Итак, решение системы есть $x = 3$; $y = —1$. Самостоятельно убедитесь, что подстановка этих значений в каждое уравнение системы обращают его в тождество.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0; \\ 2x + 3y + z = 8; \\ 3x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Вычисляем определитель системы Δ и определители при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 3 -$$

$$-1 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = -8 \neq 0;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 8 \cdot 1 \cdot 3 -$$

$$-0 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 8 \cdot 2 \cdot 2 = -8;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \cdot 3 -$$

$$-3 \cdot 8 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 2 = -24;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot 8 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 0 -$$

$$-3 \cdot 3 \cdot 0 - 1 \cdot 8 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 0 = 24.$$

Определяем значения x, y, z по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-8}{-8} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-24}{-8} = 3; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{24}{-8} = -3.$$

Проверкой убеждаемся, что решение (1, 3, —3) обращает каждое из уравнений в тождество.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2; \\ 2x - y + 2z = -2; \\ 4x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

Вычисляем определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3+16+6+4-18+4 = 15 \neq 0;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2+4-6+1-12-4 = -15;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6+16+2+8-6+4 = 30;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3-16+12+8+18-4 = 15.$$

Согласно формулам Крамера получаем:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-15}{15} = -1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{30}{15} = 2; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{15}{15} = 1.$$

4. Имеются три коммерческих банка, каждый из которых начисляет определенный годовой процент. В начале года 3/8 вклада размером в 8000 долл. положили в первый банк, 1/2 вклада — во второй и остаток — в третий. К концу года сумма вкладов во всех трех банках составила 9300 долл. Если бы первоначально 1/8 вклада положили в первый банк, 5/8 — во второй и остаток — в третий, то к концу года сумма вкладов составила бы 9150 долл. Если бы 1/2 вклада положили в первый банк, 1/8 вклада — во второй, а остаток — в третий, то к концу года сумма вкладов составила бы 9250 долл. Какова годовая процентная ставка каждого из банков?

Пусть x, y, z — процентные ставки банков: первого, второго, третьего.

В первый банк вложили 3000 долл., и к концу года сумма составит

$$3000 + 3000\frac{x}{100} = 3000 + 30x.$$

Аналогично, во второй банк вложили 4000 долл., и к концу года сумма составит

$$4000 + 4000\frac{y}{100} = 4000 + 40y.$$

Для третьего банка имеем: $1000 + 10z$.

По условию: $3000 + 30x + 4000 + 40y + 1000 + 10z = 9300$, или $3x + 4y + z = 130$.

Рассуждая аналогично, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 4y + z = 130; \\ x + 5y + 2z = 115; \\ 4x + y + 3z = 125. \end{cases}$$

Согласно методу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 40 \neq 0; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 130 & 4 & 1 \\ 115 & 5 & 2 \\ 125 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 800;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 130 & 1 \\ 1 & 115 & 2 \\ 4 & 125 & 3 \end{vmatrix} = 600; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 130 \\ 1 & 5 & 115 \\ 4 & 1 & 125 \end{vmatrix} = 400.$$

В результате получаем

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{800}{40} = 20; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{600}{40} = 15; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{400}{40} = 10.$$

Рассмотрим случай, когда определитель системы $\Delta = 0$. Здесь возможны два варианта:

1) хотя бы один из определителей при неизвестных не равен нулю. Это имеет место только тогда, когда коэффициенты при некоторых неизвестных пропорциональны. При этом получается система из противоречивых уравнений, которая *не имеет решений*;

2) все определители равны нулю. Это имеет место только тогда, когда коэффициенты при неизвестных пропорциональны, т.е. каждое уравнение системы получается из первого уравнения умножением обеих его частей на одно и то же число. Очевидно, что при этом система имеет *бесчисленное множество решений*.

Примеры

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = 4; \\ 2x - 4y = 3. \end{cases}$$

Вычисляем определитель системы Δ и определители Δ_x и Δ_y:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 2(-2) = 0; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -16 + 6 = -10;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5.$$

Так как $\Delta = 0$, а $\Delta_x \neq 0$ и $\Delta_y \neq 0$, то система не имеет решений (уравнения противоречивы).

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4; \\ 6x - 9y = 12. \end{cases}$$

Находим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = -18 + 18 = 0; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 12 & -9 \end{vmatrix} = -36 + 36 = 0;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0.$$

Так как $\Delta = 0$, а $\Delta_x = 0$ и $\Delta_y = 0$, то система имеет бесчисленное множество решений (коэффициенты при неизвестных пропорциональны).

Упражнения

Решите систему уравнений

1. $\begin{cases} x + 3y = -2; \\ 3x + 4y = -1. \end{cases}$ **2**. $\begin{cases} x + 2y = 4; \\ 5x + 9y = 20. \end{cases}$ **3**. $\begin{cases} x + y + z = 2; \\ 2x + 3y - z = 0; \\ 3x + 5y + 7z = 8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x-3y+z=2; \\ x+5y-4z=-5; \\ 4x+y-3z=-4. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x+2y+3z=2; \\ x-5y-z=0; \\ 2x-3y+2z=-1. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x+2z=1; \\ 3x-y=1; \\ 4x-y+3z=1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x-7y+z=11; \\ 2y+3z=7; \\ 3x+y-z=-1. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x-3y+z=13; \\ x-5z=2; \\ x+y+z=-1. \end{cases}$

Ответ: **1**. $x=1$; $y=-1$. **2**. $x=4$; $y=0$. **3**. $x=2$; $y=-1$; $z=1$. **4**. $x=5$; $y=6$; $z=10$. **5**. $\varnothing$. **6**. $x=3$; $y=8$; $z=-1$. **7**. $x=1$; $y=-1$; $z=3$. **8**. $x=2$; $y=-3$; $z=0$.

Задача-шутка

Садовник при сдельной оплате труда работал так: полдня копал яму, следующие полдня сажал кусты, заработал 6 у.е. На другой день полдня сажал кусты и полдня косил траву, заработал 5 у.е. На третий день полдня копал яму и полдня косил траву, заработал 7 у.е. Сколько он заработает, если весь день будет косить траву?

Ответ: 6 у.е.

Упражнение. Малое предприятие выпускает три вида обуви: сапоги, кроссовки, ботинки, используя три вида сырья: S_1, S_2, S_3. Технико-экономические показатели указаны в таблице. Составьте план выпуска обуви каждого вида, обеспечивающий полное использование сырья.

Сырье	Запасы сырья, кг	Расход сырья на единицу продукции		
		Сапоги	Кроссовки	Ботинки
S_1	2500	6	3	5
S_2	1000	3	1	2
S_3	1600	4	2	3

Указание. Пусть x, y, z — количество обуви каждого вида. Тогда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 6x+3y+5z=2500, \\ 3x+y+2z=1000, \\ 4x+2y+3z=1600, \end{cases}$$

а затем решаем ее.

Ответ: $x=100$; $y=300$; $z=200$.

5.3. Матрицы

5.3.1. Определения

Матрицей размера $m \times n$ (произносится «эм на эн») называется таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Будем обозначать матрицы латинскими буквами A, B, C, ... Числа, составляющие матрицу, называют ее *элементами*. Каждому элементу присваиваются два индекса, которые определяют место (как ряд и место в кинозале) элемента в матрице: элемент a_{ij} находится в i-й строке и j-м столбце матрицы A.

Пример. Элемент a_{31} расположен в 3-й строке и 1-м столбце; элемент a_{22} расположен во 2-й строке и 2-м столбце.

Обычно, используют следующие обозначения матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A = (a_{ij}).$$

Пример. Ниже приведены матрицы размера $m \times n$ при различных значениях m и n:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, m = 3, n = 2.$

2. $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, m = 2, n = 3.$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, m = 3, n = 3.$

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов ($m = n$), называется *квадратной матрицей порядка n*. Иначе матрица называется *прямоугольной*.

Если $m = 1$ ($n \neq 1$), то матрица в этом случае называется *матрицей-строкой* и имеет вид

$$A = (a_1 \;\; a_2 \;\; \ldots \;\; a_n).$$

Если $n = 1$ ($m \neq 1$), то в этом случае матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix}$$

и называется *матрицей-столбцом*. Такие матрицы еще называют *векторами*, т.е. векторы можно рассматривать как частные случаи матрицы.

Транспонированной матрицей к матрице $A = (a_{ij})$ называется $A^{\mathrm{T}} = (b_{ji})$, получающаяся из A заменой строк на столбцы: $b_{ji} = a_{ij}$.

Пример. Найти матрицу A^{T}, транспонированную к A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \; A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Упражнения. Транспонируйте матрицы:

$$\mathbf{1}.\; A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{2}.\; A = (0 \;\; -3).$$

Ответ: $\mathbf{1}.\; A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. $\mathbf{2}.\; A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

5.3.2. Линейные операции над матрицами

1. При *умножении* матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ получаем матрицу $B = (b_{ij})$, т.е. $\lambda A = B$, элементы которой равны $b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Пример. Пусть $\lambda = 2$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$B=\lambda A=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}.$$

2. При *сложении* матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ получаем матрицу $C=(c_{ij})$, т.е. $A+B=C$, элементы которой равны $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Очевидно, что можно складывать только прямоугольные матрицы одного размера.

Примеры

1. Сложить матрицы A и B, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$.

Здесь A и B — квадратные матрицы второго порядка. Складывая их соответствующие элементы, получим

$$A+B=\begin{pmatrix}1+5 & 2+6\\ 3+7 & 4+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 10 & 12\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить линейную комбинацию матриц $2A-B$, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & -6 & 1\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}.$$

Сначала находим произведение $2A$ и $-B$:

$$2A=\begin{pmatrix}4 & -12 & 2\\ 6 & 0 & 8\end{pmatrix},\ -B=\begin{pmatrix}5 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Теперь найдем сумму полученных матриц:

$$2A-B=\begin{pmatrix}4+5 & -12-2 & 2-3\\ 6+0 & 0+1 & 8+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -14 & -1\\ 6 & 1 & 10\end{pmatrix}.$$

3. Дано $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$. Найти $C=A+B+A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$.

Сначала находим транспонированные матрицы A^{T} и B^{T}:

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -4\end{pmatrix},\ B^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 4 & 6\end{pmatrix}.$$

По правилу сложения матриц определяем

$$C=\begin{pmatrix}1+2+1+2 & 2+4-3+5\\ -3+5+2+4 & -4+6-4+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 8 & 4\end{pmatrix}.$$

Упражнения

1. Сложить следующие матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -3 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 7 & 4\\ 1 & 8 & 0\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить линейную комбинацию матриц $3A+2B$, если

$$A=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 3 & -2\\ -1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & 5\\ 4 & 0\end{pmatrix}.$$

3. Найти $C=2A^{\mathrm{T}}+5B$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}.$$

Ответ: **1**. $\begin{pmatrix}2 & 8 & 7\\ 2 & 5 & 5\end{pmatrix}$. **2**. $\begin{pmatrix}18 & 1\\ 5 & 4\\ 5 & 15\end{pmatrix}$. **3**. $\begin{pmatrix}7 & 5\\ 8 & 13\\ 25 & 8\end{pmatrix}$.

5.3.3. Произведение матриц

Если $A=(a_{ij})$ — матрица размера $m\times n$, а $B=(b_{ij})$ — матрица размера $n\times p$, то произведение A и B есть матрица $C=A\cdot B=(c_{ij})$ размера $m\times p$, у которой элемент с номером ij равен $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,b_{kj}$. Иначе говоря, c_{ij} является скалярным произведением i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.

Важные замечания

1. Условие возможности перемножения матриц: количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы, т.е. матрицы должны быть *согласованы*.

2. В результате перемножения двух матриц получается матрица, содержащая столько строк,

сколько их имеет первая матрица, и столько столбцов, сколько их имеет вторая матрица.

Схематически последнее утверждение изображено на рис. 11.

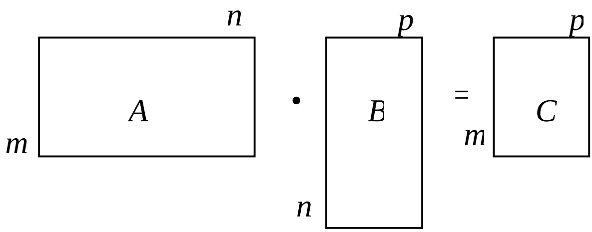


Рис. 11

Что касается правила для вычисления элементов в произведении двух матриц, то его схема показана на рис. 12.

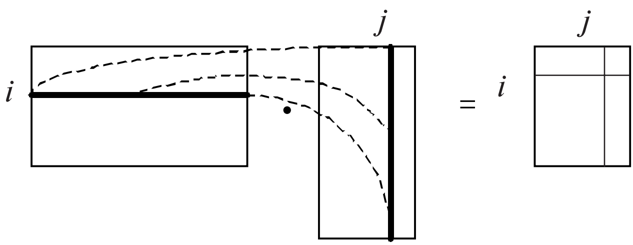


Рис. 12

Примеры

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -3 & -2\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C=A\cdot B$.

По правилу умножения матриц находим

$$C=\begin{pmatrix}2\cdot1+(-3)\cdot2 & 2\cdot(-3)+(-3)\cdot4 & 2\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)\\ 4\cdot1+5\cdot2 & 4\cdot(-3)+5\cdot4 & 4\cdot(-2)+5\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2-6 & -6-12 & -4+3\\ 4+10 & -12+20 & -8-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -18 & -1\\ 14 & 8 & -13\end{pmatrix}.$$

2. Перемножить матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&5\end{pmatrix}.$$

Произведение $C=A\cdot B$ имеет смысл, поскольку число столбцов матрицы A равно числу строчек матрицы B:

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot1+3\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3 & 1\cdot1+2\cdot4+3\cdot5\\ 4\cdot1+5\cdot1+6\cdot1 & 4\cdot1+5\cdot2+6\cdot3 & 4\cdot1+5\cdot4+6\cdot5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6&14&24\\15&32&54\end{pmatrix}.$$

Произведение B на A здесь не имеет смысла.

Упражнения. Вычислить произведения матриц:

1. $(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}16\\0\\-2\end{pmatrix}$. **2**. $\begin{pmatrix}-2&3\\-4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-9&6\\-6&4\end{pmatrix}$. **3**. $\begin{pmatrix}2&1&0\\3&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\2&2\end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$. **5**. $\begin{pmatrix}1&1&-3\\1&2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$. **6**. $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$.

Ответ: **1**. (10). **2**. $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$. **3**. $\begin{pmatrix}4&5\\7&9\end{pmatrix}$. **4**. $\begin{pmatrix}9&12&15\\19&26&33\\29&40&51\end{pmatrix}$. **5**. $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
6. $\begin{pmatrix}22&28\\49&64\end{pmatrix}$.

Пример. Вычислить $A\cdot B$ и $B\cdot A$, если

$$A=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\3&1\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-3&3-1\\-1+6&-1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\5&1\end{pmatrix}.$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-1&-1+2\\9-1&-3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\8&-1\end{pmatrix}.$$

Этот пример показывает, что произведение двух матриц, вообще говоря, не подчиняется переместительному закону: $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Упражнения

1. Даны матрицы A и B. Найти их произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$.

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить $A\cdot B - B\cdot A$:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Ответ: **1**. а) $A\cdot B=\begin{pmatrix} -4 & 19 \\ -14 & -4 \end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix} 14 & 18 & -13 \\ -20 & -20 & 14 \\ 20 & 5 & -2 \end{pmatrix}$;

б) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 8 & -2 & 8 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \\ 11 & 14 & 11 \end{pmatrix}$;

в) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 24 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, произведение $B\cdot A$ невозможно.

2. а) $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислить $A\cdot B$, $B\cdot A$, $A\cdot C$, $B\cdot C$ и C^2.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2+3&1+4+9\\4+5+6&4+10+18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&14\\15&32\end{pmatrix}.$$

Аналогично,

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4&2+5&3+6\\1+8&2+10&3+12\\1+12&2+15&3+18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&7&9\\9&12&15\\13&17&21\end{pmatrix}.$$

Далее,

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\2&1&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+0+6&-1+2+3&0+2+3\\4+0+12&-4+5+6&0+5+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&4&5\\16&7&11\end{pmatrix},$$

$$C^2=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\2&2&2\\4&0&2\end{pmatrix}.$$

Произведение $B\cdot C$ не определено, так как число столбцов B (два) не равно числу строк C (три).

Можно проверить, что умножение матриц подчиняется сочетательному закону $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ и распределительному закону $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$.

Пример. Вычислить $A\cdot B\cdot C$, где

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&2\\2&2&3\\3&3&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&1\\2&2\\1&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}.$$

Число столбцов матрицы A равно трем, число строк матрицы B тоже равно трем, следовательно можно умножить A на B:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&2\\2&2&3\\3&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\2&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0+1&0+0+1\\-1+2+2&1+2+2\\-2+4+3&2+4+3\\-3+6+4&3+6+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\3&5\\5&9\\7&13\end{pmatrix}.$$

Матрица $A \cdot B$ имеет два столбца, а матрица C — две строки, следовательно их можно перемножить:

$$A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \\ 5 & 9 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 12+5 \\ 20+9 \\ 28+13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 29 \\ 41 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что перемножение в другой последовательности, т. е. в форме $A \cdot (B \cdot C)$, будет иметь меньшее число операций, хотя приведет, естественно, к тому же результату:

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+1 \\ 8+2 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+5 \\ -3+10+10 \\ -6+20+15 \\ -9+30+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 29 \\ 41 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что действительно в первом варианте выполнялось 52 операций умножения и сложения, а во втором — лишь 29. Естественно, вероятность ошибки в этом случае будет меньше.

Упражнения. Вычислить произведения трех матриц. Убедитесь на данных примерах в справедливости равенства $A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$:

1. $(1\ 2\ 3) \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15 \\ 1 \end{pmatrix}$. **2**. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: **1**. (7). **2**. $\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$.

Линейная алгебра для специалистов, в частности по экономике и управлению, является одним из основных инструментов анализа экономических процессов, требующих обработки и представления в компактном виде больших массивов числовых данных (цен, издержек производства, зарплат сотрудников, производственных планов и др.). В качестве иллюстрации матричных операций приведем пример, в котором видна удобная и компактная запись.

Пример. Фирма производит продукцию двух видов, используя два типа ресурсов (см. таблицу).

Ресурсы	Расход ресурса на единицу продукции		Стоимость единицы ресурсов, у.е.
	I	II	
1	2	3	70
2	1	5	30

Рассчитать затраты фирмы на выпуск 100 единиц продукции I вида и 150 единиц продукции II вида.

Подсчитаем сначала затраты на выпуск 1 единицы продукции каждого вида:

$$(70\ \ 30)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = (170\ \ 360).$$

Окончательно суммарные затраты подсчитываем так:

$$(170\quad 360)\begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} = (170\cdot 100\ +\ 360\cdot 150) = (71000).$$

5.3.4. Обратная матрица. Матричный способ решения СЛАУ

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} вычисляется вычеркиванием в исходном определителе строки и столбца, в которых расположен элемент a_{ij}. После этого вычисляется получившийся определитель со своим знаком, если сумма индексов рассматриваемого элемента (в данном случае a_{ij}) четная, и с противоположным знаком в противном случае.

Пусть A — квадратная матрица, тогда матрица A^{-1} называется *обратной* к A, если

$$AA^{-1} = E, \quad A^{-1}A = E.$$

Эта матрица, *единичная*, имеет вид:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица существует тогда и только тогда, когда $|A| \neq 0$, т.е. исходная матрица невырожденная.

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

а) вычислить определитель матрицы A и убедиться, что он не равен 0;

б) записать транспонированную матрицу A^{T};

в) записать *присоединенную* матрицу A^*, элементами которой служат алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A^{T};

г) записать обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$.

Матричный способ решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Матричная запись системы линейных уравнений

$$AX = B,$$

тогда

$$X = A^{-1}B.$$

Пример. Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$$

методом обратной матрицы.

Для этого составим и вычислим определитель:

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29 \neq 0.$$

Запишем транспонированную матрицу A^{T} и присоединенную матрицу A^{*}:

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}; A^{*} = \begin{pmatrix} -15 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -6 \\ 5 & -10 & -1 \end{pmatrix}.$$

Запишем обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*}$:

$$A^{-1} = -\frac{1}{29} \begin{pmatrix} -15 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -6 \\ 5 & -10 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{29} \begin{pmatrix} -15 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -6 \\ 5 & -10 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{29} \begin{pmatrix} -15 \cdot 5 + 1 \cdot 16 + 3 \cdot 10 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 16 - 6 \cdot 10 \\ 5 \cdot 5 - 10 \cdot 16 - 1 \cdot 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{29} \begin{pmatrix} -29 \\ -87 \\ -145 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x = 1;\ y = 3;\ z = 5.$

Упражнения

1. Убедитесь в существовании матрицы, обратной матрице $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, найдите ее и сделайте проверку.

2. Найдите обратную матрицу и выполните проверку:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 3, \\ x - y = -1, \\ -x + 2y + z = 2. \end{cases}$$

методом обратной матрицы.

Ответ: **1**. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$; **2**. $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **3**. $x = 1$; $y = 2$; $z = -1$.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Вычислить определители:

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; в) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$;

г) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}$.

2. Решить системы уравнений по правилу Крамера и методом обратной матрицы:

а) $\begin{cases} 3x + 7y = -11, \\ 5x - 2y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + y - z = 1, \\ 3x + 2y - 2z = 1, \\ x - y + 2z = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 2y = 10, \\ 3x + 2y + z = 23, \\ y + 2z = 13. \end{cases}$

3. Найти матрицу $C = 2A + 3B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Найти произведение матриц A и B:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Найти произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Вычислить разность произведений матриц $A \cdot B - B \cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Для изготовления трех видов изделий A, B, и C предприятие использует три основных вида сырья I, II и III. Нормы расхода сырья на производство одного изделия, а также общее количество сырья указаны в таблице.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Общее количество сырья, кг
	A	B	C	
I	2	1	1	35
II	1	1	2	45
III	1	0	1	20

Сколько изделий каждого вида может выпустить предприятие?

8. Найти обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ни одно человеческое исследование
не может называться истинной наукой,
если оно не прошло через
математические доказательства.

Леонардо да Винчи

6. Основы векторной алгебры

В основу векторной алгебры, занимающейся изучением операций над векторами, положено понятие свободного вектора. Термин «вектор» ввел ирландский ученый У. Гамильтон (ок. 1845 г.), образовав его от латинского слова *vector* (вектор), означающего «несущий», «носитель».

6.1. Основные понятия

Величины, полностью определяемые заданием их численных значений, называются *скалярными*. Но есть величины, которые имеют еще одну характеристику — направление. Это векторные величины, они описываются векторами.

Вектором называется направленный отрезок. Вектор характеризуется длиной и направлением. Одна из ограничивающих его точек принимается за начало, вторая — за конец, который на рисунке показывается стрелкой.

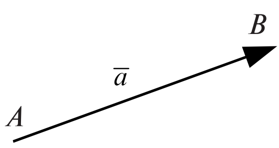


Рис. 13

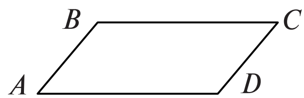
Если даны начало отрезка (точка A) и его конец (точка B), то вектор обозначается $\overline{AB}$ (рис. 13). Будем также обозначать векторы малыми латинскими буквами с черточкой наверху $\overline{a}$. Встречаются и такие обозначения: $\vec{a}$ или $\boldsymbol{a}$.

Модулем вектора $\overline{a}$ называется его длина. Модуль вектора обозначается $|\overline{a}|$.

Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым* вектором. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным*. Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или параллельны. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину.

Из понятия равенства векторов вытекает, что если вектор $\bar{a}$ перенести параллельно самому себе, перемещая его начало в любую другую точку пространства, то получим вектор, равный данному.

Пример. Указать равные векторы в параллелограмме *ABCD*.



Так как векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ коллинеарны (лежат на параллельных прямых) и сонаправлены, а в силу свойства параллелограмма $|AB| = |DC|$, то $\overline{AB} = \overline{DC}$. Очевидно также, что $\overline{BC} = \overline{AD}$.

Произведением вектора $\bar{a}$ на число $\lambda \neq 0$ называется вектор длиной $|\lambda a|$; при $\lambda > 0$ векторы $\bar{a}$ и $\lambda\bar{a}$ сонаправлены, при $\lambda < 0$, то они противоположны по направлению. В частности, если $\lambda = -1$, то векторы $\bar{a}$ и $\lambda\bar{a}$ называются противоположными.

Признак коллинеарности векторов: два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны ($\bar{a} \parallel \bar{b}$) тогда, и только тогда, когда один из них есть произведение другого на некоторое число, т.е. $\bar{b} = \lambda\bar{a}$.

Упражнение. Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Коллинеарны ли векторы $\bar{c} = \bar{a} - 2\sqrt{3} \cdot \bar{b}$ и $\bar{d} = -\sqrt{3} \cdot \bar{a} + 6 \cdot \bar{b}$?

Ответ: $\bar{c} \parallel \bar{d}$; $\bar{d} = -\sqrt{3} \cdot \bar{c}$.

Суммой двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется новый вектор, соединяющий начало вектора $\bar{a}$ с концом вектора $\bar{b}$, отложенного от конца вектора $\bar{a}$. Для геометрического представления суммы векторов используют правила «треугольника» и «параллелограмма».

Правило треугольника. Пусть направленный отрезок $\overline{AB}$ представляет собой вектор $\bar{a}$. Приложив к точке B заданный вектор $\bar{b}$, получим направлен-

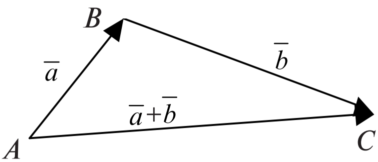


Рис. 14

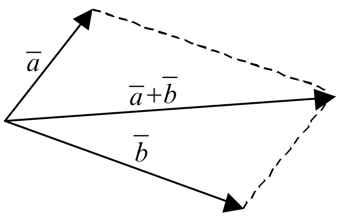


Рис. 15

ный отрезок $\overline{BC}$. Вектор, представленный направленным отрезком $\overline{AC}$, называется суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (рис. 14).

Правило параллелограмма. Отложим векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ от одной точки и построим на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ параллелограмм (рис. 15). Тогда вектор-диагональ параллелограмма, выходящий из общей начальной точки векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, есть вектор $\overline{a}$ + $\overline{b}$.

Разность векторов можно определить как сумму первого вектора с вектором, противоположным второму.

Три вектора называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или параллельны некоторой плоскости.

Признак компланарности векторов: три ненулевых вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией других, например $\overline{c} = \lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b}$.

6.2. Проекция вектора на ось. Разложение вектора по компонентам

Базисом на плоскости (в пространстве) называются любые два (три) линейно независимых вектора.

Если в качестве базиса взять два взаимно перпендикулярных единичных вектора $\overline{i}$ и $\overline{j}$, то говорят, что вектор разложен в плоской *декартовой* системе координат. Точка *O*, принятая за начало векторов $\overline{i}$ и $\overline{j}$, называется *началом координат.* Прямые, проведенные через векторы $\overline{i}$ и $\overline{j}$, называются *осями координат*, соответственно осью абсцисс и осью ординат.

Если в пространстве заданы три попарно перпендикулярных единичных вектора $\overline{i}$, $\overline{j}$ и $\overline{k}$, отложенные от некоторой точки O, то будем называть эту тройку прямоугольным базисом в пространстве, а точку O — началом прямоугольной системы координат в пространстве. Оси, определяемые единичными векторами, называются соответственно осью абсцисс, осью ординат и осью аппликат.

Вектор $\overline{OA}$ для произвольной точки A называется ее *радиус-вектором. Проекцией точки A* на заданную ось называется точка — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на ось.

Проекция вектора на ось — это число, выражающее длину отрезка оси, заключенного между проекциями начала и конца вектора. Это число положительное, если направление отрезка совпадает с направлением оси, и отрицательное, если оно противоположно направлению оси. Подчеркнем, что проекция вектора есть *число*, алгебраическая величина, но не вектор.

Координатами вектора в декартовом базисе являются проекции этого вектора на оси координат. Разложение вектора $\overline{a}$ в декартовой системе координат обозначается $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$. Такое представление называют аналитическим выражением вектора $\overline{a}$, а числа a_x, a_y, a_z — его координатами.

Модуль вектора $\overline{a}$ равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат:

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Направление вектора $\overline{a}$ определяется углами α, β и γ, которые он образует с осями Ox, Oy и Oz соответственно. Косинусы этих углов называются направляющими косинусами вектора $\overline{a}$. Они определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}.$$

Нетрудно доказать, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Если a_x, a_y, a_z — проекции вектора $\overline{a}$ на координатные оси Ox, Oy и Oz, то пишут: $\overline{a}\ \{a_x; a_y; a_z\}$.

Отметим некоторые свойства проекций векторов.

1. Каждая координата суммы двух и большего числа векторов равна сумме соответствующих координат слагаемых векторов, то есть если $\overline{a}\ \{a_x; a_y; a_z\}$, $\overline{b}\ \{b_x; b_y; b_z\}$, то $\overline{a} + \overline{b}$ имеет координаты

$$\{a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z\}.$$

2. Каждая координата разности двух векторов равна разности этих векторов, т. е. если $\overline{a}\ \{a_x; a_y; a_z\}$, $\overline{b}\ \{b_x; b_y; b_z\}$, то $\overline{a} - \overline{b}$ имеет координаты

$$\{a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z\}.$$

3. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число, т. е. если $\overline{a}\ \{a_x; a_y; a_z\}$, то вектор $\overline{b} = \lambda\overline{a}$ имеет координаты $\{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\}$.

Из последнего свойства вытекает *условие коллинеарности* двух векторов: для того чтобы два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ были коллинеарны ($\overline{a} \parallel \overline{b}$), необходимо и достаточно, чтобы их проекции были пропорциональны, т. е.

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Пример. Установить, коллинеарны ли векторы $\overline{a}\{1; 3; 5\}$ и $\overline{b}\{2; 6; 0\}$.

Так как $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \neq \frac{5}{0}$, то векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны.

Если вектор $\overline{AB}$ не проходит через начало координат, то $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$. Другими словами, если начало вектора в точке $A\ (x_A; y_A; z_A)$, а конец в точке $B\ (x_B; y_B; z_B)$, то чтобы определить координаты вектора $\overline{AB}$, следует из координат его конца вычесть соответствующие координаты его начала:

$$\overline{AB}\,\{x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A\}.$$

Примеры

1. Даны две точка $A(3; 1; -1)$ и $B(5; 2; -3)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$, его модуль $|\overline{AB}|$ и направляющие косинусы $\overline{AB}$.

Используя приведенные выше формулы, получаем:

$\overline{AB}\,\{5 - 3;\ 2 - 1;\ -3 - (-1)\}$, то есть $\overline{AB}\,\{2;\ 1;\ -2\}$;

$$|\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3;$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{3},\ \cos\beta = \frac{1}{3},\ \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

2. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(1; -2; 3)$, $B(3; 2; 1)$, $C(6; 4; 4)$. Найти его четвертую вершину D.

Обозначим координаты вершины D через x, y, z, т. е. $D(x; y; z)$. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то имеем: $\overline{BC} = \overline{AD}$.

Определяем координаты векторов $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$: $\overline{BC} = \{6 - 3;\ 4 - 2;\ 4 - 1\}$, т.е. $\overline{BC} = \{3;\ 2;\ 3\}$; $\overline{AD} = \{x - 1;\ y + 2;\ z - 3\}$. Из равенства векторов $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$ следует, что $x - 1 = 3$, $y + 2 = 2$, $z - 3 = 3$. Отсюда находим: $x = 4$, $y = 0$, $z = 6$. Итак, $D(4; 0; 6)$.

3. Даны два вектора $\overline{a} = 3\overline{i} + 5\overline{j} - 2\overline{k}$ и $\overline{b}\,\{-4; 5; 1\}$. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\overline{c} = \overline{a} - 3\overline{b}$.

По условию и в силу приведенных выше формул имеем: $\overline{a}\{3; 5; -2\}$ и $\overline{b}\,\{-4; 5; 1\}$. Тогда по свойствам проекций координаты вектора $\overline{c}$ равны:

$$c_x = a_x - 3b_x = 3 - 3(-4) = 15,$$
$$c_y = a_y - 3b_y = 5 - 3\cdot 5 = -10,$$
$$c_z = a_z - 3b_z = -2 - 3\cdot 1 = -5.$$

Следовательно, длина вектора $|\,\overline{c}\,| = \sqrt{15^2 + (-10)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{14}$, а его направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{15}{5\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}},\ \cos\beta = \frac{-10}{5\sqrt{14}} = -\frac{2}{\sqrt{14}},\ \cos\gamma = \frac{-5}{5\sqrt{14}} = -\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Упражнения

1. Даны точки $A(2; 5)$ и $B(-3; 2)$. Найти проекции вектора $\overline{AB}$ на оси координат.

2. Даны точки $A(1; 2)$ и $B(5; -1)$. Определить углы вектора $\overline{AB}$ с осями Ox и Oy, а также длину этого вектора.

3. Найти проекции вектора $\overline{a}$ на оси координат, если $\overline{a} = \overline{AB} + \overline{CD}$, $A(0; 0; 1)$, $B(3; 2; 1)$, $C(4; 6; 5)$ и $D(1; 6; 3)$.

4. Найти периметр треугольника, образованного векторами $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$, если $A(0; 1; -3)$, $B(2; 5; -7)$, $C(-2; 1; -3)$.

5. Даны два вектора $\overline{a}\{5; 2; -1\}$ и $\overline{b}\{3; 0; 1\}$. Определить длину и направляющие вектора $2\overline{a} - \overline{b}$.

6. Установить, коллинеарны ли векторы $\overline{a}\{2; -3; 5\}$ и $\overline{b}\{4; -6; 10\}$.

Ответ: **1**. $\{-5; -3\}$. **2**. $\cos\alpha = 4/5$; $\sin\alpha = -3/5$; $AB = 5$. **3**. $\{0; 2; -2\}$. **4**. $8+4\sqrt{3}$. **5**. $\sqrt{74}$, $7/\sqrt{74}$, $4/\sqrt{74}$, $-3/\sqrt{74}$. **6**. $\overline{a} \| \overline{b}$.

6.3. Нелинейные операции над векторами

6.3.1. Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов и косинуса угла между ними. Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначается через $\overline{a} \cdot \overline{b}$ или $(\overline{a}, \overline{b})$. Таким образом, по определению,

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos(\overline{a}\,\overline{b}).$$

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны, то

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos 90^\circ = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot 0 = 0.$$

Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны (ортогональны).

Скалярному произведению можно придать другую форму записи, используя свойства проекций, а именно:

$$(\overline{a},\overline{b})=|\,\overline{a}\,|\cdot \text{пр}_{\overline{a}}\,\overline{b}=|\,\overline{b}\,|\cdot \text{пр}_{\overline{b}}\,\overline{a},$$

т. е. скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, умноженной на проекцию другого вектора по направлению первого.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и заданы своими проекциями на координатные оси, то есть $\overline{a}\ \{a_x;\ a_y;\ a_z\}$, $\overline{b}\ \{b_x;\ b_y;\ b_z\}$, тогда

$$(\overline{a},\overline{b})=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z.$$

Примеры

1. Найти угол α между векторами $\overline{a}\{1;\,2\}$ и $\overline{b}\,\{2;\,-6\}$.

Согласно приведенным выше формулам,

$$\cos\alpha=\cos(\overline{a},\overline{b})=\frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}||\,\overline{b}|}=\frac{1\cdot 2+2\cdot(-6)}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+(-6)^2}}=$$

$$=\frac{-10}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{40}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

т. е. $\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и, значит, $\alpha=3\pi/4$, или $135°$.

2. При каком значении m вектор $\overline{a}\{1;\,-3;\,m\}$ будет перпендикулярен вектору $\overline{b}\,\{2;\,1;\,4\}$?

Для того чтобы два вектора были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю:

$(\overline{a},\overline{b})=1\cdot 2+(-3)\cdot 1+m\cdot 4=0$, откуда $m=1/4$.

3. Даны вершины четырехугольника $A\,(-1;\,4;\,3)$, $B\,(0;\,8;\,1)$, $C\,(-4;\,4;\,5)$ и $D\,(4;\,-3;\,7)$. Доказать, что диагонали AC и BD перпендикулярны.

Определим координаты векторов $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$: $\overline{AC}\,\{-3;\,0;\,2\}$, $\overline{BD}\{4;\,-11;\,6\}$, а затем вычислим их скалярное произведение:

$$(\overline{AC},\overline{BD})=-3\cdot 4+0\cdot(-11)+2\cdot 6=0.$$

Так как оно равно нулю, то вектор $\overline{AC}$ перпендикулярен $\overline{BD}$, а значит, перпендикулярны и диагонали AC и BD, что и требовалось доказать.

4. Даны три точки: $A\,(4;\,2;\,10)$, $B\,(2;\,3;\,5)$, $C\,(5;\,3;\,7)$. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$.

Обозначим векторы $\overline{AB} = \overline{a}$, а $\overline{AC} = \overline{b}$. Найдем координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{a}\{-2; 1; -5\}$ и $\overline{b}\{1; 1; -3\}$. Из формулы $(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{b}| \cdot \text{пр}_{\overline{b}}\, \overline{a}$ имеем:

$$\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{b}|} = \frac{(-2)\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-5)\cdot(-3)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{14}{\sqrt{11}}.$$

Упражнения

1. Найти косинус угла между векторами $\overline{a}\{1; -2; 2\}$ и $\overline{b}\{3; -4; 12\}$.

2. Даны векторы $\overline{a} = m\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}$ и $\overline{b} = 4\overline{i} + m\overline{j} - 7\overline{k}$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

3. Даны точки $A(2; 4; 1)$, $B(3; 4; 2)$, $C(2; 3; 0)$. Вычислить угол между векторами $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$.

4. Найти проекцию $\text{пр}_{2\overline{a}+\overline{b}}\, \overline{a}$, если $\overline{a}\{1; 2; 3\}$ и $\overline{b}\{-2; 1; 0\}$.

Ответ: **1**. 35/19. **2**. $m = 4$. **3**. $\pi/6$. **4**. $5/\sqrt{61}$.

6.3.2. Векторное произведение двух векторов

Пусть даны два неколлинеарных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$. *Векторным произведением* вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий условиям:

1) модуль вектора $\overline{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, приведенных к общему началу, как на сторонах, т. е.

$$|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin(\overline{a}\,\overline{b});$$

2) вектор $\overline{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

3) вектор $\overline{c}$ направлен так, что кратчайший поворот вектора $\overline{a}$ к вектору $\overline{b}$ виден из конца вектора $\overline{c}$ происходящим против часовой стрелки (т.е. векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют правую упорядоченную тройку векторов).

Векторное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначается $\overline{a} \times \overline{b}$ или $[\overline{a}, \overline{b}]$. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то их векторное произведение равно нулевому вектору.

Если векторы заданы своими проекциями на координатные оси: $\overline{a}\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$, $\overline{b}\{b_x;\ b_y;\ b_z\}$, то

$$[\overline{a},\overline{b}]=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Примеры

1. Даны два вектора: $\overline{a}\{2;-1;3\}$ и $\overline{b}\{0;4;-1\}$. Найти $[\overline{a},\overline{b}]$, $|\overline{a}\times\overline{b}|$, площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

По приведенным выше формулам получаем:

$$[\overline{a},\overline{b}]=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}=-11\overline{i}+2\overline{j}+8\overline{k}.$$

Тогда $|\overline{a}\times\overline{b}|=\sqrt{(-11)^2+2^2+8^2}=\sqrt{189}$. Из условия 1 определения векторного произведения площадь параллелограмма равна $\sqrt{189}$.

2. Вычислить синус угла, образованного векторами $\overline{a}\{2;-2;1\}$ и $\overline{b}\{2;3;6\}$.

Так как $|\overline{a}\times\overline{b}|=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\sin(\overline{a}\overline{b})$, то $\sin(\overline{a}\overline{b})=\dfrac{|\overline{a}\times\overline{b}|}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$.

Применяя приведенные выше формулы, получаем: $|\overline{a}|=$ $=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$; $|\overline{b}|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7$;

$$[\overline{a},\overline{b}]=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}=-15\overline{i}-10\overline{j}+10\overline{k};$$

$$|\overline{a}\times\overline{b}|=\sqrt{(-15)^2+(-10)^2+10^2}=\sqrt{425}=5\sqrt{17}.$$

Таким образом, $\sin(\overline{a}\,\overline{b})=\dfrac{5\sqrt{17}}{3\cdot 7}=\dfrac{5\sqrt{17}}{21}\approx 0{,}982$.

3. Определить площадь треугольника с вершинами $A(2;3;7)$, $B(1;2;3)$, $C(4;-5;6)$.

Построим векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ и найдем их координаты, равные разности координат конца и начала: $\overline{AB}\{-1;\ -1;\ -4\}$ и $\overline{AC}\{2;\ -8;\ -1\}$.

Находим векторное произведение $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$[\overline{AB},\overline{AC}]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -1 & -1 & -4\\ 2 & -8 & -1\end{vmatrix}=-31\overline{i}-9\overline{j}+10\overline{k}.$$

Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, следовательно,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-31)^2+(-9)^2+10^2}=\frac{\sqrt{1142}}{2}.$$

Упражнения

1. Даны векторы $\overline{a}\{3;\ -1;\ -2\}$ и $\overline{b}\{1;\ 2;\ -1\}$. Определить координаты их векторного произведения.

2. По данным векторам $\overline{a}=2\overline{i}-3\overline{j}+5\overline{k}$ и $\overline{b}=\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}$ вычислить площадь построенного на них параллелограмма.

3. Найти площадь треугольника ABC, если $A\,(1;\ 2;\ 0)$, $B\,(3;\ 0;\ -3)$, $C\,(5;\ 2;\ 6)$.

Ответ: **1**. $\{5;\ 1;\ 7\}$. **2**. $3\sqrt{2}$. **3**. 14.

6.3.3. Смешанное произведение трех векторов

Пусть даны три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$. Найдем векторное произведение $[\overline{a},\overline{b}]$. Получим некоторый вектор. Умножим его скалярно на вектор $\overline{c}$, т.е. найдем число $([\overline{a},\overline{b}],\overline{c})$. Это число называют смешанным или векторно-скалярным произведением векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

Обозначается смешанное произведение векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ символом $([\overline{a},\overline{b}],\overline{c})$. Модуль смешанного произведения векторов $([\overline{a},\overline{b}],\overline{c})$ равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ как на ребрах.

Для того чтобы три ненулевых вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы $([\overline{a},\overline{b}],\overline{c})=0$. Если $\overline{a}\{a_x; a_y; a_z\}$, $\overline{b}\{b_x; b_y; b_z\}$, $\overline{c}\{c_x; c_y; c_z\}$, то

$$([\overline{a},\overline{b}],\overline{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Примеры

1. Треугольная пирамида имеет вершины: A (3; 3; 3), B(5; 4; 4), C(5; 6; 5), D(6; 6; 7). Определить ее объем и высоту, опущенную на грань ABC.

Объем пирамиды равен 1/6 части объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$. Найдем проекции векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$: $\overline{AB}\{2; 1; 1\}$, $\overline{AC}\{2; 3; 2\}$, $\overline{AD}\{3; 3; 4\}$. Тогда

$$\left(\left[\overline{AB},\overline{AC}\right],\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}=7 \text{ и } V=7/6.$$

Известно, что объем пирамиды можно вычислить по формуле $V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot H$. Отсюда находим высоту: $H=\frac{3V}{S_{\text{осн}}}$. Вычисляем $S_{\text{осн}}$ — площадь треугольника ABC, воспользовавшись векторным произведением $[\overline{AB},\overline{AC}]$:

$$[\overline{AB},\overline{AC}]=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-\overline{i}-2\overline{j}+4\overline{k}.$$

Отсюда получаем $|[\overline{AB},\overline{AC}]|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{21}$ и

$$S_{\text{осн}}=\frac{1}{2}|[\overline{AB},\overline{AC}]|=\frac{\sqrt{21}}{2}.\ \text{Тогда } H=\frac{3\cdot\frac{7}{6}}{\frac{\sqrt{21}}{2}}=\frac{7}{\sqrt{21}}=\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

2. Показать, что векторы $\overline{a}\{-1; 3; 2\}$, $\overline{b}\{2; -3; -4\}$ и $\overline{c}\{-3; 12; 6\}$ компланарны.

Достаточным условием компланарности векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ является равенство нулю их смешанного произведения. Покажем, что это условие в данном примере выполняется:

$$([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 36 + 48 - 18 - 48 - 36 =$$

$$= 102 - 102 = 0.$$

Так как смешанное произведение оказалось равным нулю, то, следовательно, векторы компланарны.

Упражнения

1. Компланарны ли векторы $\overline{a}\{14; -6; 4\}$, $\overline{b}\{-6; 14; -16\}$, $\overline{c}\{2; -2; 2\}$?

2. При каком значении λ векторы $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + \lambda \overline{k}$, $\overline{b}\{0; 1; 0\}$ и $\overline{c}\{3; 0; 1\}$ компланарны?

3. Даны вершины пирамиды A (5; 1; –4), B (1; 2; –1), C(3; 3; –4), D(2; 2; 2). Определить ее объем и высоту, опущенную на грань ABC.

Ответ: **1**. Да, компланарны. **2**. 1/3. **3**. $V = 4$; $H = 4\sqrt{3/3}$.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение вектора. Как он обозначается?

2. Найти косинусы углов, которые вектор $\overline{AB}$ составляет с осями координат, если A(1; 2; 3), B(2; 4; 5).

3. Даны вершины треугольника A (2; 1; –3), B (5; 0; –4), C (7; 4; –2). Определить длину медианы AM.

4. Для пары векторов $\overline{a}\{-1; 3; 5\}$ и $\overline{b}\{4; -2; 2\}$ выяснить будет ли она: а) коллинеарной; б) ортогональной?

5. Даны векторы $\overline{a}\{-1; y; 4\}$ и $\overline{b}\{3; -1; 2\}$. Найдите координату y, если известно, что $\overline{a} \perp \overline{b}$.

6. Найти площадь треугольника ABC, вершины которого заданы декартовыми координатами трехмерного пространства: A (1; 3; 6), B (6; 9; –2), C (–3; –6; 8).

7. Проверить, является ли четырехугольник с вершинами в точках A(1; 1; 1), B(4; 4; 1), C(7; 1; 1), D(4; –2; 1) квадратом.

…Математику нельзя изучать, наблюдая, как это делает сосед!

А. Нивен

7. Элементы аналитической геометрии

Аналитическая геометрия – раздел геометрии, в котором простейшие геометрические образы (прямые, плоскости, линии и поверхности второго порядка) исследуются средствами алгебры. Известная всем по школьному курсу элементарная геометрия доказывает теоремы с помощью чертежа, т. е. с помощью построения. Аналитическая же геометрия обладает общим методом решения геометрических задач, так как те правила и формулы аналитической геометрии, с помощью которых решается данная, отдельно взятая задача, применимы и для решения целого ряда других весьма разнообразных геометрических задач. Этот метод, называемый методом координат, был введен в науку в XVII в. известным французским математиком и философом Р. Декартом.

7.1. Прямая на плоскости

Существует несколько систем координат, с помощью которых на плоскости однозначно можно задать положение точки или уравнение кривой. Наиболее простой и наиболее употребительной системой является декартова система координат. Эту систему координат образуют две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy. Любая точка на плоскости задается двумя числами, называемыми *координатами точки*. Одно из этих чисел равно расстоянию от точки до оси Ox, а другое — расстоянию от точки до оси Oy. Есть несколько способов задания прямой на плоскости.

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом k:

$$y = kx + b. \tag{7.1}$$

В этом уравнении k — угловой коэффициент, от значения которого зависит величина угла наклона прямой к осям координат. Численно он равен тангенсу угла наклона прямой к оси Ox; b — величина отрезка, отсекаемого на прямой Oy.

Пример. Найти уравнение прямой, образующей с осью Ox угол $\varphi = \pi / 3$, отсекающей на оси Oy отрезок $b = 5$.

Для составления уравнения этой прямой необходимо найти тангенс угла φ. Он равен $\sqrt{3}$. Тогда $k = \sqrt{3}$, $b = 5$. Значит, уравнение прямой будет иметь следующий вид: $y = \sqrt{3}\,x + 5$.

2. Уравнение прямой, проходящей через точку $M\,(x_1; y_1)$ с данным угловым коэффициентом:

$$y - y_1 = k\,(x - x_1). \qquad (7.2)$$

Это уравнение называют уравнением «пучка» прямых.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M\,(5; 6)$ и образующей с осью Ox угол $\varphi = \pi / 4$.

Зная угол между прямой и осью Ox, можно найти угловой коэффициент: $k = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1.$ Подставляя координаты точки M, указанные в условии, и найденное значение углового коэффициента в уравнение (7.2), получим уравнение прямой в следующем виде:

$$y - 6 = 1 \cdot (x - 5) \text{ или } y = x + 1.$$

Упражнения

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M\,(2; -4)$ и имеющей угловой коэффициент $k = 3$.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M\,(3; -2)$ под углом $135°$ к оси Ox.

Ответ: **1**. $3x - y - 10 = 0$. **2**. $y = -x + 7$.

3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1\,(x_1; y_1)$ и $M_2\,(x_2; y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \qquad (7.3)$$

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1\,(3; 1)$ и $M_2\,(1; -2)$.

Подставляя координаты точек, указанные в условии, в уравнение (7.3), получим уравнение прямой в следующем виде:

$$\frac{y-1}{-2-1}=\frac{x-3}{1-3},\ y-1=\frac{3}{2}(x-3),\ y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}.$$

Упражнение. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки: а) M_1 (3; 4) и M_2 (5; —3); б) M_1 (1; —2) и M_2 (–2; 3); в) M_1 (4; —2) и M_2 (3; —2).

Ответ: а) $7x + 2y - 29 = 0$; б) $5x + 3y + 1 = 0$; в) $y = -2$.

4. Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0, \qquad (7.4)$$

где A и B — проекции вектора $\bar{N}$, перпендикулярного к прямой $\bar{N} = (A, B)$. От уравнения прямой, записанного в общем виде, легко перейти к уравнению прямой с угловым коэффициентом. Для этого из уравнения (7.4) нужно выразить y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Используя обозначения, приведенные в уравнении (7.1), находим, что $k = -\frac{A}{B}$.

Пример. Дано уравнение прямой, записанное в общем виде:

$$-6x + 2y + 14 = 0.$$

Записать это уравнение в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом.

Выразив y из уравнения, данного в условии, получим $y = 3x - 7$.

В зависимости от соотношения коэффициентов в уравнении (7.4), возможны несколько частных случаев:

1. Если $C = 0$, то $y = -\frac{A}{B}x$ — такая прямая проходит через начало координат.

2. Если $B = 0$ $(A \neq 0)$, то $x = -\frac{C}{A}$ — такая прямая параллельна оси Oy.

3. Если $A = 0$ $(B \neq 0)$, то $y = -\frac{C}{B}$ — такая прямая параллельна оси Ox.

4. Если $B = C = 0$, то $Ax = 0$, $x = 0$ — такая прямая совпадает с осью Oy.

5. Если $A = C = 0$, то $By = 0$, $y = 0$ — такая прямая совпадает с осью Ox.

5. Уравнение прямой, заданной в отрезках. Сделаем несколько простых преобразований в уравнении (7.4). Перенесем коэффициент C в правую часть и разделим все уравнение на $-C$, тогда получим:

$$Ax + By = -C;\ -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1.$$

Запишем полученное соотношение в другом виде:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 \text{ или } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (7.5)$$

где $a = -\dfrac{C}{A}$, $b = -\dfrac{C}{B}$.

Коэффициенты a и b в уравнении (7.5) имеют простой и наглядный геометрический смысл. Примем в уравнении (7.5) $x = 0$. Тогда $y = b$. Аналогично, взяв в уравнении (7.5) $y = 0$, получим $x = a$. Таким образом, коэффициенты a и b равны отрезкам, которые отсекает прямая на координатных осях (рис. 16).

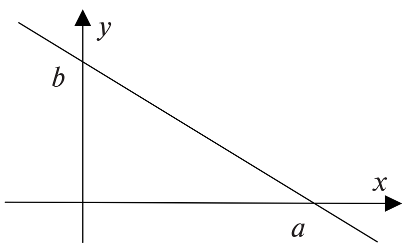


Рис. 16

Пример. Прямая задана уравнением $2x+4y=-16$. Составить для этой прямой уравнение в отрезках.

Найдем a и b для заданной в условии прямой:

$$a = -\frac{16}{2} = -8,\ b = -\frac{16}{4} = -4.$$

Тогда уравнение в отрезках будет иметь следующий вид:

$$\frac{x}{-8} + \frac{y}{-4} = 1.$$

Упражнения

1. Привести к виду в отрезках уравнения прямых: а) $2x+3y+6=0$; б) $5x-4y+20=0$.

2. Определить отрезки на осях, отсекаемые прямой $2x-3y+6=0$.

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(-3; 8)$ и отсекающей на оси Ox отрезок, вдвое меньший, чем на оси Oy.

Ответ: **1**. а) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$; б) $\frac{x}{-4}+\frac{y}{5}=1$. **2**. $a=-3$; $b=2$. **3**. $2x+y-2=0$.

7.2. Взаимное расположение прямых на плоскости

Углом между прямыми l_1 и l_2 называется угол, на который нужно повернуть прямую l_2 по часовой стрелке для совмещения ее с прямой l_1.

Пусть нам даны прямые l_1 и l_2, заданные с помощью уравнений с угловыми коэффициентами:

1) $y=k_1x+b_1$;

2) $y=k_2x+b_2$.

Тогда мы можем определить угол между этими прямыми по следующей формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \tag{7.6}$$

Из этой формулы можно получить условия параллельности и перпендикулярности прямых. Действительно, угол между параллельными прямыми равен 0, $\operatorname{tg}0=0$, значит: $\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=0$.

Отсюда видно, что у параллельных прямых

$$k_1=k_2, \tag{7.7}$$

Так как угол между перпендикулярными прямыми равен $\pi/2$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\infty$, значит: $\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\infty$. Отсюда следует, что $1+k_1k_2=0$ или

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (7.8)$$

Пример. Даны две прямые, заданные в общем виде: $4x + 2y = -12$ и $3x + y = 8$. Найти тангенс угла между этими прямыми.

Для того чтобы воспользоваться формулой (7.6), надо перейти от уравнений в общем виде к уравнениям с угловыми коэффициентами: $y = -2x - 6$ и $y = -3x + 8$.

Из этих уравнений видно, что угловые коэффициенты у данных прямых равны соответственно $k_1 = -2$, $k_2 = -3$. Подставляя эти значения в формулу (7.6), получаем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-3-(-2)}{1+(-3)(-2)} = -\frac{1}{7}.$$

Упражнения

Определить угол между прямыми: а) $y = 2x - 3$ и ; б) $4x + y - 1 = 0$ и $5x - 3y - 7 = 0$.

Ответ: а) $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; б) $\varphi = 45°$.

Пример. Убедиться в том, что прямые: $x - 3y = 12$ и $5x - 15y = 30$ параллельны.

Для того чтобы в этом убедиться, необходимо перейти к уравнениям с угловыми коэффициентами: $y = \frac{x}{3} - 4$ и $y = \frac{x}{3} - 2$.

Из этих уравнений видно, что $k_1 = k_2 = \frac{1}{3}$. Значит, выполняется условие параллельности прямых (7.7) и, следовательно, данные прямые параллельны.

Упражнения

1. Среди прямых $y = 2x + 6$, $y = -\frac{x}{2} + 3$, $y = 2x$ указать параллельные и перпендикулярные.

2. Составить уравнения двух прямых, проходящих через точку (2; 1), одна из которых параллельна прямой $3x - 2y + 2 = 0$, а другая перпендикулярна той же прямой.

Ответ: **1**. Первая и третья прямые параллельны, вторая перпендикулярна первой, а следовательно, и третьей. **2**. $3x - 2y - 4 = 0$ и $2x + 3y - 7 = 0$.

Если прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то величина φ угла между ними вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}, \tag{7.9}$$

условие их параллельности

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \tag{7.10}$$

условие их перпендикулярности

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{7.11}$$

Для нахождения общих точек прямых l_1 и l_2 необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2. \end{cases} \tag{7.12}$$

Для наглядности и удобства представим сведения этого раздела в виде табл. 6.

Таблица 6

Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Параллельны	$k_1 = k_2;\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$
Перпендикулярны	$k_1k_2 + 1 = 0;\ k_1 = -\frac{1}{k_2};\ A_1A_2 + B_1B_2 = 0$
Пересекаются	$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2};\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$
Совпадают	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

Пример. Через точку пересечения прямых $3x - 2y + 5 = 0$ и $x + 2y - 9 = 0$ проведена прямая, параллельная прямой $2x + y + 6 = 0$. Составить ее уравнение.

Найдем сначала точку M пересечения данных прямых. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-2y+5=0, \\ x+2y-9=0. \end{cases}$$

Здесь $x = 1$, $y = 4$, т.е. $M(1;4)$. Угловой коэффициент прямой $2x + y + 6 = 0$ есть $k_1 = -2$. Следовательно, угловой коэффициент прямой, параллельной данной, есть $k = -2$. По направлению прямой ($k = -2$) в точке $M(1;4)$, ей принадлежащей, запишем уравнение искомой прямой: $y - 4 = -2(x - 1)$, т.е. $2x + y - 6 = 0$.

Упражнения

1. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x + 6y + 5 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$ и через точку $M(-4/5;\ 1)$.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M $(-2;\ -5)$ и параллельной прямой $3x+4y+2=0$.

3. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $5x + 3y + 10 = 0$, $x + y - 15 = 0$ и через начало координат.

Ответ: **1**. $5x + 4 = 0$. **2**. $3x + 4y + 26 = 0$. **3**. $17x + 11y = 0$.

7.3. Нормальное уравнение прямой

Нормальным уравнением прямой называется уравнение, записанное в виде:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \qquad (7.13)$$

где α — это угол между нормалью к прямой и осью Ox; p — расстояние от начала координат до прямой, которое равно длине перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную прямую.

Угол между прямой l и вектором p равен 90° (рис. 17).

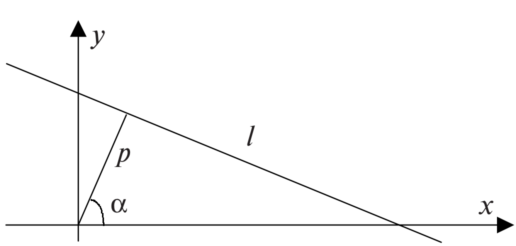


Рис. 17

Существует простое правило, позволяющее привести общее уравнение прямой к нормальному виду. Пусть дано уравнение прямой, записанное в общем виде: $Ax + By + C = 0$. Тогда для того, чтобы привести это уравнение к нормальному виду, его нужно домножить на $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Знак «+» в этой формуле берется в случае, если C — отрицательное число, и «—», если C — положительное число. Величина μ называется *нормирующим множителем*. Для определенности предположим, что C — отрицательное, тогда μ надо брать со знаком «+». В результате получим:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y - \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos\alpha,\ \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin\alpha,\ \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = p.$$

Мы имеем право вводить такие обозначения, так как главное тригонометрическое тождество ($\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$) выполняется. В этом можно убедиться:

$$\frac{A^2}{A^2 + B^2} + \frac{B^2}{A^2 + B^2} = \frac{A^2 + B^2}{A^2 + B^2} = 1.$$

Применяя сделанные обозначения, получим уравнение прямой (7.13) в нормальном виде.

Пример. Дано уравнение прямой в общем виде: $3x + 4y - 15 = 0$. Найти нормальное уравнение прямой и расстояние от прямой до начала координат.

Для того чтобы получить из общего уравнения прямой нормальное уравнение, нужно общее уравнение домножить на $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Так как в нашем уравнении $C = -15 < 0$, то μ должен быть со знаком «+»: $\mu = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}$. Домножим уравнение на полученное значение μ. Тогда будем иметь:

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 3 = 0.$$

Данное уравнение является нормальным. Сравнивая его с уравнением (7.9), можно увидеть, что $p = 3$. Значит, можно сразу ответить и на второй вопрос задачи: расстояние от начала координат до данной прямой равно 3.

Упражнения

1. Привести уравнение $3x - 4y + 10 = 0$ к нормальному виду.

2. На каком расстоянии от начала координат находятся прямые: а) $2x + 3y - 4 = 0$; б) $4x + 3y - 7 = 0$; в) $2x + y = 0$.

Ответ: **1**. $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0$. **2**. а) $4/\sqrt{13}$; б) 1,4; в) 0.

7.4. Расстояние от точки до прямой

Пусть даны нормальное уравнение прямой L: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ и точка M_0 $(x_0; y_0)$. Тогда расстояние от точки M_0 до прямой L может быть найдено по формуле

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|. \tag{7.14}$$

Расстояние d от точки M_0 $(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|. \tag{7.15}$$

Примеры

1. Дана прямая L: $8x + 6y - 20 = 0$ и точка M_0 (5; 2). Определить расстояние от прямой L до точки M_0.

Первый способ. Для того чтобы найти это расстояние, надо привести уравнение прямой L к нормальному виду. Множитель μ в данном случае равен $\frac{1}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{1}{10}$. Значит, уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{8}{10}x + \frac{6}{10}y - 2 = 0.$$

Сравнивая его с уравнением (7.13), можно получить, что $\cos\alpha = \frac{8}{10}$; $\sin\alpha = \frac{6}{10}$; $p = 2$. Подставляя эти значения, а также координаты точки M_0 в формулу (7.14), определим искомое расстояние:

$$d = \left|\frac{8}{10}\cdot 5 + \frac{6}{10}\cdot 2 - 2\right| = \frac{16}{5}.$$

Второй способ. Воспользуемся непосредственно формулой (7.11):

$$d = \left|\frac{8\cdot 5 + 6\cdot 2 - 20}{\sqrt{8^2 + 6^2}}\right| = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}.$$

2. Вершины треугольника расположены в точках с координатами (1/2; 2), (3; 4) и (—2; 3). Определить длину высоты, опущенной из вершины с наибольшей ординатой.

Составляем уравнение стороны треугольника, проходящей через точки (1/2; 2) и (—2; 3):

$$\frac{y-2}{3-2} = \frac{x-1/2}{-2-1/2}.$$

Преобразуем его к общему виду, в результате получаем уравнение

$$2x + 5y - 11 = 0.$$

Длину искомой высоты рассчитываем по формуле (7.11):

$$d = \left|\frac{2\cdot 3 + 5\cdot 4 - 11}{\sqrt{2^2 + 5^2}}\right| = \frac{26-11}{\sqrt{29}} = \frac{15}{\sqrt{29}} \approx 2{,}78.$$

Упражнения

1. Найти расстояние от точки M_0 (2; —3) до прямой $3x - 4y + 2 = 0$.

2. Найти расстояние от прямой $x - 2y + 4 = 0$ до точки M_0 (1; 2).

3. Вычислить расстояние точки M_0 (2; 7) от прямой $3x + 4y - 10 = 0$.

Ответ: **1**. 4. **2**. $\sqrt{5}/5$. **3**. 4,8.

7.5. Смешанные задачи на прямую

Пример. Даны координаты вершин треугольника ABC на координатной плоскости A (—9; 7), B (3; —3), C (7; 12). Составить уравнение медианы CM и уравнение высоты CK.

По определению медианы треугольника, точка M является серединой отрезка AB. Если даны две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то координаты середины отрезка AB можно найти по формулам:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

В нашем случае координаты середины отрезка AB будут следующими:

$$x_0 = \frac{-9+3}{2} = -3;\ y_0 = \frac{7-3}{2} = 2.$$

Чтобы составить уравнение медианы CM, необходимо получить уравнение прямой, проходящей через две точки $C(7; 12)$ и $M(-3; 2)$. Воспользовавшись формулой (7.3), найдем:

$$\frac{y-12}{2-12} = \frac{x-7}{-3-7},\ y = x + 5.$$

Значит, уравнение медианы CM будет иметь следующий вид: $y = x + 5$.

Теперь получим уравнение высоты CK. По определению высоты треугольника, CK должна быть перпендикулярна стороне AB. Воспользовавшись формулой (7.3), найдем уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

$$\frac{y-7}{-3-7} = \frac{x-(-9)}{3-(-9)} \text{ или } y = -\frac{5}{6}x - \frac{1}{2}.$$

Значит, угловой коэффициент прямой AB равен $-\frac{5}{6}$. Для того чтобы определить угловой коэффициент прямой, перпендикулярной AB, воспользуемся соотношением (7.8). Тогда угловой коэффициент прямой CK будет следующим:

$$k_{CK} = -\frac{1}{-\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}.$$

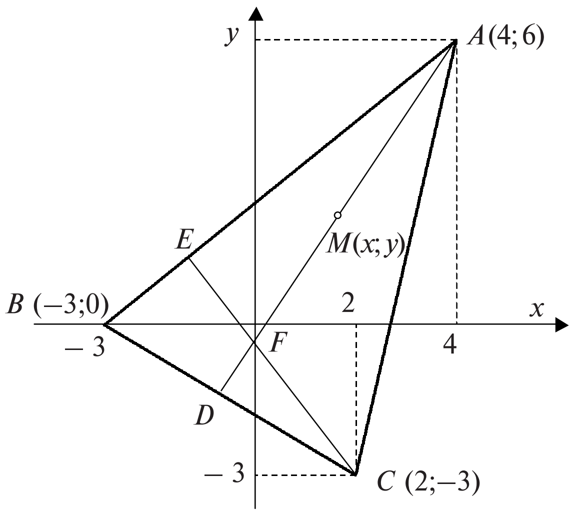
Для того чтобы найти уравнение прямой, проходящей через точку C с заданным угловым коэффициентом, воспользуемся соотношением (7.2). Подставляя в это соотношение найденный коэффициент k_{CK} и координаты точки C, получим:

$$y - 12 = \frac{6}{5}(x-7) \text{ или } y = \frac{6}{5}x + \frac{18}{5}.$$

Последнее соотношение и является уравнением высоты CK.

Пример. Дан треугольник с вершинами $A(4; 6)$, $B(-3; 0)$, $C(2; -3)$. Найти углы треугольника, уравнения биссектрисы AD, высоты CE и точку их пересечения.

Выполним чертеж согласно условию задачи. Найдем угловые коэффициенты прямых AB, BC, AC.



Угловой коэффициент прямой, проходящей через две точки с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, определяется по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Следовательно,

$$k_{AB} = \frac{0-6}{-3-4} = \frac{6}{7};\ k_{BC} = \frac{-3-0}{2-(-3)} = -\frac{3}{5};\ k_{AC} = \frac{-3-6}{2-4} = \frac{9}{2}.$$

Теперь найдем углы треугольника, воспользовавшись формулой (7.6). Имеем:

$$\operatorname{tg} A = \frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC}k_{AB}} = \frac{\frac{9}{2} - \frac{6}{7}}{1 + \frac{9}{2}\cdot\frac{6}{7}} = \frac{3}{4} = 0{,}75,\quad \angle A = \operatorname{arctg} 0{,}75 \approx 36°52';$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{k_{BC} - k_{AB}}{1 + k_{BC}k_{AB}} = \frac{-\frac{3}{5} - \frac{6}{7}}{1 + \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{6}{7}} = 3,\quad \angle B = \operatorname{arctg} 3 \approx 71°34';$$

$$\operatorname{tg} C=\frac{k_{BC}-k_{AC}}{1+k_{BC}k_{AC}}=\frac{-\frac{3}{5}-\frac{9}{2}}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{9}{2}}=3,\ \angle C=\operatorname{arctg} 3\approx 71^\circ 34'.$$

Так как $\angle B=\angle C$, то ΔABC — равнобедренный.

Для нахождения уравнения биссектрисы $\angle A$ надо сначала написать уравнения сторон AB и AC данного треугольника с использованием формулы (7.3):

- уравнение AB: $\dfrac{y-6}{0-6}=\dfrac{x-4}{-3-4}$ или $6x - 7y+18=0$;
- уравнение AC: $\dfrac{y-6}{-3-6}=\dfrac{x-4}{2-4}$ или $9x - 2y - 24=0$.

Пусть точка $M(x; y)$ лежит на биссектрисе AD (x и y — текущие координаты биссектрисы), тогда она будет одинаково удалена от сторон AB и AC $\angle A$. Расстояние точки $M(x; y)$ от стороны AB $d_1=\left|\dfrac{6x-7y+18}{\sqrt{36+49}}\right|$, аналогично расстояние точки $M(x; y)$ от прямой AC $d_2=\left|\dfrac{9x-2y-24}{\sqrt{81+4}}\right|$. Так как точки B и C лежат по разные стороны относительно биссектрисы AD, то $d_1=-d_2$. Следовательно, уравнение биссектрисы AD имеет вид

$$\frac{6x-7y+18}{\sqrt{85}}=-\frac{9x-2y-24}{\sqrt{85}}$$

или после упрощений

$$5x - 3y - 2=0.$$

Запишем теперь уравнение прямой CE. По условию прямая CE перпендикулярна к прямой AB, следовательно, с учетом (7.8) $k_{CE}=-\dfrac{1}{k_{AB}}=-\dfrac{7}{6}$.

Выражение (7.2) позволяет написать уравнение прямой CE, проходящей через данную точку $C(2; -3)$ в данном направлении:

$$y-(-3)=-\frac{7}{6}(x-2) \text{ или } 7x+6y+4=0.$$

Найдем точку пересечения F прямых AD и CE. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 7x+6y+4=0, \\ 5x-3y-2=0. \end{cases}$$

Так как система уравнений имеет решение $x=0$; $y=-\frac{2}{3}$, по искомой точке пересечения указанных прямых будет $F\left(0;-\frac{2}{3}\right)$.

Упражнения

1. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(1; —3)$, $B(—5; 7)$, $C(—3; —1)$. Запишите уравнения прямых, на которых расположены: а) медиана AM; б) высота BH этого треугольника.

2. По координатам вершин треугольника A $(—1; —2)$, $B(—4; 2)$, $C(5; 6)$ составить уравнения сторон, медианы, проведенной из вершины C, и высоты, опущенной из вершины A.

Ответ: **1**. AM: $6x+5y+9=0$; BH: $2x—y+17=0$. **2**. Уравнения сторон: $4x+3y+10=0$, $4x—9y+34=0$, $4x—3y—2=0$; медианы: $4x—5y+10=0$; высоты: $9x+4y+17=0$.

7.6. Линии второго порядка

В аналитической геометрии изучаются алгебраические линии, или кривые. Прямая является линией первого порядка, так как выражается уравнением первой степени. Кривые второго порядка аналитически выражаются уравнением второй степени.

7.6.1. Окружность

Выведем уравнение окружности с центром в точке $C(x_0,y_0)$ и радиусом R. Для произвольной точки $M(x,y)$ окружности выполняется равенство $MC = R$ (рис. 18).

Известно, что расстояние между двумя точками на плоскости равно $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. Возводя обе части равенства в квадрат, получаем *уравнение окружности*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

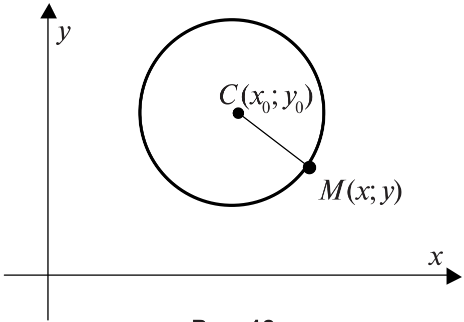


Рис. 18

При $x_0 = 0$; $y_0 = 0$ получаем

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ или } \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1. \qquad (7.16)$$

7.6.2. Эллипс

Представим левую часть уравнения (7.16) в более общем виде, когда коэффициенты при x^2 и y^2 не равны, т. е.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (7.17)$$

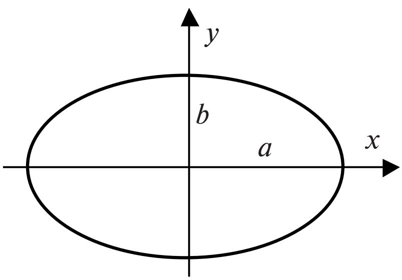


Рис. 19

Это *уравнение эллипса*. Величины a, b называются полуосями эллипса (рис. 19). При $a = b$ эллипс превращается в окружность.

«Сплюснутость» эллипса относительно осей характеризуется величиной эксцентриситета $\varepsilon = c/a$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Так называемые фокусы эллипса находятся в точках $F'(-c;0)$ и $F(c;0)$.

Эллипс — множество точек $M(x,y)$, для которых сумма расстояний FM и $F'M$ есть величина постоянная, равная $2a$. Известно, что планеты и искусственные спутники движутся по эллипсам.

7.6.3. Гипербола

Построим кривую второго порядка, описываемую уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (7.18)$$

Она называется *гиперболой* и представлена на рис. 20 (правая и левая ветви). Точки $A(a,0)$ и $A'(-a,0)$ называются *вершинами гиперболы*. Прямые $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$ называются *асимптотами* гиперболы (прямыми, к которым бесконечно приближается функция $y(x)$ при $x\to\infty$, не пересекая их).

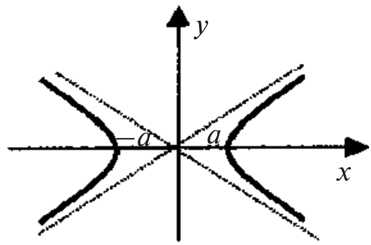


Рис. 20

Для определения уравнений этих прямых запишем последовательно:

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2;\ y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-b^2}.$$

Левая часть последнего равенства при $x\to\infty$ можно заменить на $y=\pm\frac{b}{a}x$. Это и есть уравнение асимптот.

7.6.4. Парабола

Парабола — это множество точек $M(x,y)$, расстояние которых FM до определенной точки F (фокуса) равно расстоянию DM до определенной прямой d (директрисы) (рис. 21).

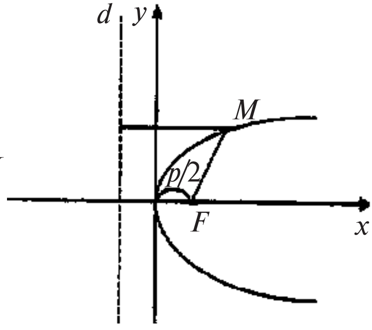


Рис. 21

Парабола — кривая второго порядка, описываемая уравнением

$$y^2 = 2px. \tag{7.19}$$

Пример. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(8; 2)$ и симметрична относительно оси Ox. Написать ее уравнение.

Так как парабола симметрична относительно оси Ox и имеет вершину в начале координат, то ее уравнение имеет вид $y^2 = 2px$. Точка $A(8; 2)$ лежит на параболе, подставим ее координаты в уравнение параболы: $2^2 = 2p \cdot 8$. Отсюда получим $p = 1/4$. Следовательно, уравнение параболы:

$$y^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} x \text{ или } y^2 = \frac{1}{2} x.$$

Упражнения

1. Написать уравнение окружности, если центр находится в точке $C(-2; 0)$, а радиус $R = 2$.

2. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.

3. Дано уравнение гиперболы $5x^2 - 4y^2 = 20$. Найти уравнение асимптот.

4. Составить простейшее уравнение параболы, если известно, что ее фокус находится в точке пересечения прямой $4x - 3y - 4 = 0$ с осью Ox.

Ответ: **1**. $(x+2)^2 + y^2 = 4^2$. **2**. 5 и 4; (3; 0) и (—3; 0); $\varepsilon = 0{,}6$. **3**. $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$. **4**. $y^2 = 4x$.

7.7. Понятие об уравнении плоскости и прямой в пространстве

7.7.1. Плоскость в пространстве

Каждая плоскость определяется уравнением первой степени в декартовых пространственных координатах, и всякое уравнение первой степени задает плоскость. Как и для прямой на плоскости, так и для плоскости в пространстве существует несколько вариантов записи уравнений. Вот некоторые из них.

Общее уравнение плоскости. Пусть плоскость Q проходит через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{e} = (A, B, C)$ (рис. 22). Этими условиями определяется единственная плоскость в пространстве $Oxyz$. Вектор $\overline{e}$ называется нормальным вектором плоскости Q.

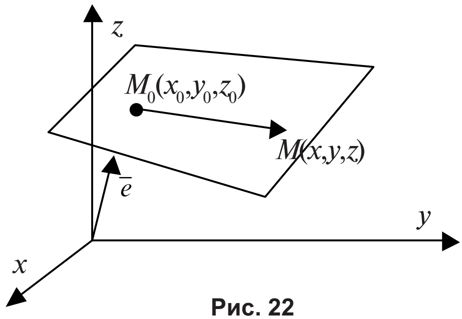


Рис. 22

Возьмем в плоскости Q произвольную точку $M(x,y,z)$. Тогда вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$ будет перпендикулярен вектору $\overline{e} = (A, B, C)$. Следовательно, скалярное произведение этих векторов равно нулю, т.е. $(\overline{e}, \overline{M_0M}) = 0$.

Полученное уравнение представим в координатной форме:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (7.20)$$

Уравнение (7.20) является уравнение плоскости, перпендикулярной данному вектору $\overline{e} = (A, B, C)$ и проходящей через определенную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Уравнение плоскости, записанное в виде

$$Ax + By + Cz = 0, \qquad (7.21)$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, называется *общим уравнением плоскости*.

Если $D = 0$, то уравнение $Ax + By + Cz = 0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат. Другие частные случаи задаются расположением нормального вектора $\overline{e} = (A, B, C)$. Так, например, если $A = 0$, то уравнение $By + Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси Ox; если $A = D = 0$, то уравнение $By + Cz = 0$ описывает плоскость, проходящую через ось Ox; если $A = B = 0$, то уравнение $Cz + D = 0$ отображает плоскость, параллельную плоскости Oxy; если $A = B = D = 0$, то уравнение $Cz = 0$ (или $z = 0$) определяет координатную плоскость Oxy.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3, -7, 1)$ перпендикулярно вектору $\bar{e} = (1, -3, 2)$.

Подставим в уравнение (7.20) координаты точки M_0 вместо x_0, y_0, z_0 и координаты вектора $\bar{e}$ вместо A, B и C:

$$1 \cdot (x - 3) + (-3) \cdot (y - (-7)) + 2 \cdot (z - 1) = 0.$$

Раскрыв скобки в последнем соотношении, получим:

$$x - 3y + 2z - 26 = 0.$$

Уравнение плоскости в отрезках имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{7.22}$$

где a, b, c — отрезки, отсекаемые плоскостью на осях Ox, Oy, Oz соответственно (плоскость проходит через точки $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$). Заметим, что если плоскость проходит через начало координат, то ее невозможно задать уравнением в отрезках.

Упражнение. Привести уравнение плоскости $2x - y + 4z - 8 = 0$ к уравнению в отрезках.

Ответ: $\frac{x}{4} + \frac{y}{-8} + \frac{z}{2} = 1.$

Нормальное уравнение плоскости имеет вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{7.23}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора нормали $\bar{e}$; p — расстояние от начала координат до плоскости.

Общее уравнение плоскости (7.21) приводится к нормальному виду (7.23) умножением (7.21) на нормирующий множитель $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (знак выбирается так, чтобы $\mu D < 0$).

Пример. Уравнение плоскости $2x - 6y + 3z - 14 = 0$ привести к нормальному виду.

Нормирующий множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{49}} = \pm\frac{1}{7}.$$

Принимаем $\mu = \frac{1}{7}$, так как в исходном уравнении свободный член $D = -14$ (отрицателен). Умножая данное уравнение на $\mu = \frac{1}{7}$, получаем

$$\frac{2}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{3}{7}z - 2 = 0.$$

Следовательно, для данной плоскости $\cos\alpha = \frac{2}{7}$; $\cos\beta = -\frac{6}{7}$; $\cos\gamma = \frac{3}{7}$; $p = 2$, т.е. расстояние от начала координат до плоскости равно 2.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.24)$$

Оно выражает равенство нулю смешанного произведения векторов $\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$, а значит, их компланарность.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 2, 1)$, $M_2(5, 7, 3)$ и $M_3(6, 4, 5)$.

Применяя равенство (7.24), запишем уравнение искомой плоскости в виде

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем $16(x-1)-6(y-2)-$ $-17(z-1)=0$. После упрощений искомое уравнение примет вид $x-6y-17z+13=0$.

7.7.2. Угол между плоскостями

Пусть даны две плоскости: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Тогда угол между этими плоскостями будет равен углу между нормалями к этим плоскостям $\bar{e}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\bar{e}_2 = (A_2, B_2, C_2)$. Его можно найти, используя формулу скалярного произведения двух векторов (см. гл. 6) с той лишь разницей, что там рассматривались двухмерные векторы, а в данном случае векторы трехмерные:

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{e}_1, \bar{e}_2)}{|\bar{e}_1||\bar{e}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{7.22}$$

Из этого соотношения легко получить условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Условие параллельности:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{7.23}$$

Условие перпендикулярности:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{7.24}$$

Примеры

1. Даны две плоскости: $2x - y + 2z - 100 = 0$ и $9x + 2y - 6z + 4 = 0$. Найти косинус угла между плоскостями.

Определим из уравнений этих плоскостей координаты нормалей $\bar{e}_1 = (2, -1, 2)$ и $\bar{e}_2 = (9, 2, -6)$. Подставим в соотношение (7.22) вместо A_1, B_1, C_1 координаты вектора $\bar{e}_1$, а вместо A_2, B_2, C_2 координаты вектора $\bar{e}_2$. Тогда:

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 9 + (-1)\cdot 2 + 2\cdot(-6)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{9^2 + 2^2 + (-6)^2}} = \frac{4}{33}.$$

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2, -1, 3)$ параллельно данной плоскости $3x + 4y - 5z + 6 = 0$.

Напишем уравнение произвольной плоскости, проходящей через точку $M_1(2, -1, 3)$:

$$A(x-2)+B(y+1)+C(z-3)=0.$$

Чтобы эта плоскость была параллельна данной, должны быть выполнены условия (7.23). Следовательно, можем взять $A = 3$; $B = 4$; $C = -5$. Подставляя значения A, B и C в предыдущее уравнение плоскости, получим

$$3(x-2)+4(y+1)-5(z-3)=0$$

или

$$3x+4y-5z+13=0.$$

7.7.3. Прямая в пространстве

Прямая в пространстве может быть задана как *линия пересечения двух плоскостей*, т.е. как множество точек, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Если прямая параллельна вектору $\overline{a}=(m, n, p)$ (называемому направляющим) и проходит через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (рис. 23), то ее уравнения могут быть получены из условия коллинеарности векторов $\left|\overline{M_1M}\right|=(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)$,

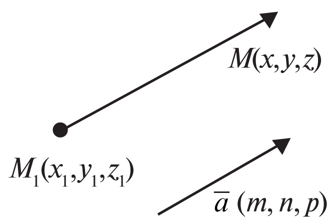


Рис. 23

где $M(x,y,z)$ — произвольная точка прямой, и $\overline{a}=(m, n, p)$:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}.$$

Эти уравнения называются *каноническими уравнениями прямой линии в пространстве*.

Если заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, через которые проходит прямая, то, принимая за направляющий вектор, например, вектор M_1M_2 с координатами $\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$, а за фиксированную точку прямой, например, точку M_1, можем записать канонические уравнения прямой в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Это уравнения прямой, проходящей через две заданные точки.

Пример. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точки $A(1, 7, 2)$ и $B(5, 1, 12)$.

За фиксированную точку прямой можно взять любую из точек A и B, например точку A, а за направляющий вектор $\overline{a}$ — вектор $\overline{AB}\ \{4, -6, 10\}$. Тогда канонические уравнения прямой запишутся в виде

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-7}{-6}=\frac{z-2}{10}.$$

Если все направляющие коэффициенты прямой умножить, например, на 1/2, то канонические уравнения той же прямой будут иметь вид

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{-3}=\frac{z-2}{5}.$$

Контрольные вопросы и упражнения

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (2; 3) и составляющей с осью Ox угол 45°.

2. Установить, какие из следующих пар прямых параллельны или перпендикулярны:

а) $6x - 15y + 4 = 0$, $10x + 4y - 7 = 0$;

б) $2x + 5y - 11 = 0$, $4x + 10y + 5 = 0$;

в) $3x - 4y + 1 = 0$, $4x - 3y + 6 = 0$.

3. Составить уравнения двух прямых, проходящих через точку A (2; −1), одна из которых параллельна прямой $3x - 2y + 2 = 0$, а другая — перпендикулярна той же прямой.

4. Определить угол между прямыми $2x + 5y - 15 = 0$ и $3x - 7y + 2 = 0$.

5. Найти расстояние от точки с координатами (−3; 4) до прямой $12x + 5y - 10 = 0$.

6. По координатам вершин треугольника $A(-1;-2)$, $B(-4; 2)$, $C(5; 6)$ вычислить угловые коэффициенты его сторон, медианы BD и биссектрисы AE.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки с координатами (1; 1; 1); (2; 3; 4) и (1; 5; 4).

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A (5; 4; 3) и отсекающей равные отрезки на осях координат.

9. Определить угол между плоскостями $2x + y - 2z - 3 = 0$; $x - y - 4z + 11 = 0$.

Математический анализ не менее всеобъемлющ,
чем сама природа; он определяет все ощутимые взаимосвязи,
измеряет времена, пространства, силы, температуры...
Его главный атрибут — ясность; в нем совершенно не имеется
знаков для выражения туманных понятий.

Ж. Фурье

8. Введение в математический анализ

Возникновение высшей математики, т. е. дифференциального и интегрального исчисления, явилось переломным моментом в истории человеческой культуры. Сегодня, когда современная наука раздвинула рамки видимого мира, понятия производной и интеграла стали необходимым элементом. Без этих понятий невозможно описывать и исследовать переменные величины и функции, характеризующие зависимости одних величин от других.

8.1. Понятие функции

Пусть X и Y — произвольные непустые множества (рис. 24).

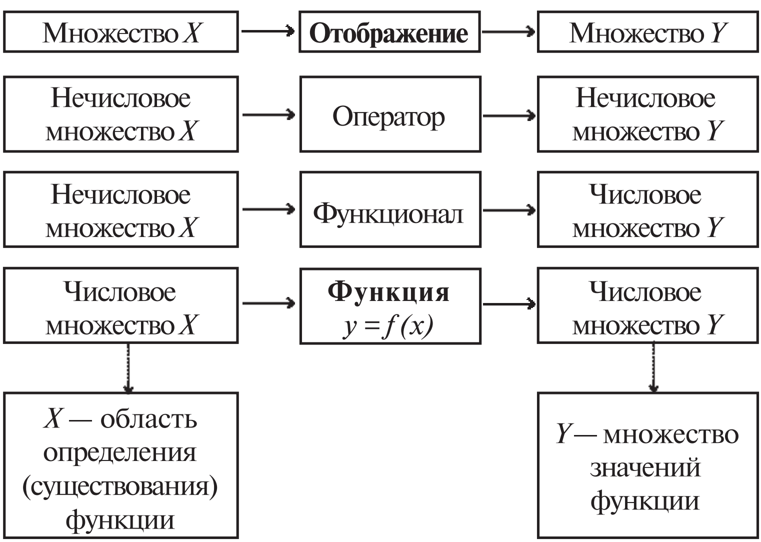


Рис. 24

Определение. Если каждому элементу $x \in X$ по какому-то правилу f поставлен в соответствие элемент $y \in Y$, то говорят, что задано отображение множества X в множество Y.

В случае, когда множества X и Y нечисловые, отображение называется оператором. Отображение нечислового множества X в числовое множество Y называется *функционалом*, а отображение числового множества X в числовое множество Y — *функцией*.

Отображение числового множества X в числовое множество Y называется функцией и обозначается $y = f(x)$.

Множество X называется *областью определения* (существования) функции, а множество Y — *множеством ее значений*; $x \in X$ — *независимой переменной*, или аргументом, $y \in Y$ — *зависимой переменной*, или функцией.

Возможны следующие способы задания функции: аналитический; графический; табличный; алгоритмический. В свою очередь различают функции: четные и нечетные; периодические; монотонные; ограниченные.

Множество точек плоскости $(x, f(x))$, где $x \in X$, называется графиком функции $y = f(x)$.

Функция считается заданной, если известно правило f, по которому каждому значению аргумента $x \in X$ можно найти соответствующее значение функции y. Наиболее распространенным заданием функции является *аналитическое*, т. е. выражение правила f некоей формулой или группой формул.

Иногда функция задается *графиком* или *таблицей*. Ясно, что формула «весомее» любой таблицы. Она не только содержит сведения, приведенные в данной таблице, но и позволяет также найти значения функции и при значениях независимой переменной, не содержащихся в таблице. Однако таблица удобнее формулы, поскольку с ее помощью можно быстрее найти значение y при данном x, если значение x есть в таблице. Таблица нагляднее сложной формулы, по которой зачастую трудно оценить значения, принимаемые функцией, однако простая формула позволяет быстрее представить себе ход функции, чем невыразительный ряд чисел (таблица).

Часто встречается такое положение, когда теории интересующего нас явления еще нет, но есть результаты опытов (экспериментов, проб), занесенные в таблицу. В этом случае практически всегда (даже «вручную», а с использованием компьютера тем более) можно подобрать приближенную формулу, которая правильно описывает функциональную зависимость и не дает больших ошибок при *интерполяции*[1], т.е. при переходе от известных значений аргумента к новым, промежуточным между уже имеющимися. Найденную зависимость называют эмпирически найденным законом, или *эмпирической формулой*[2].

Однако эмпирическая формула нуждается в проверке: погрешность, получаемая при ее использовании, может оказаться довольно значительной (ясно, что надежность эмпирической формулы будет тем выше, чем чаще сетка наблюдаемых значений переменной, исходя из которых подбирали данную формулу). И совсем нежелательно использование эмпирической формулы за пределами исследованного интервала значений независимой переменной. Такое продолжение формулы называется *экстраполяцией*[3] и может привести к большим ошибкам.

---

[1] От лат. *interpolare* — подновлять.

[2] Прилагательное «эмпирический» (от гр. *empeiria* — опыт) означает опытный, полученный опытным путем.

[3] От лат. *ex* — вне.

8.2. Предел функции

Число A называется *пределом* функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если она определена в некоторой окрестности точки x_0, исключая, может быть, саму эту точку, и каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, всегда можно указать такое число $\delta > 0$, при котором выполнение неравенства $|x - x_0| < \delta$ $(x \neq x_0)$ влечет за собой выполнимость неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 25).

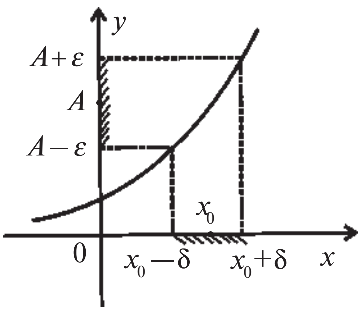


Рис. 25

Если число A является пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

В практике вычисления пределов большое место занимают так называемые 1-й и 2-й замечательные пределы:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

где x — радианная мера угла, и

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

где $e = 2{,}71828...$ — иррациональное число, служащее основанием натуральных логарифмов, обозначаемых $\ln x$.

Предел — важнейшее понятие математики. Понятие предела опирается на интуитивное представление о процессе изменения и неограниченного приближения. Точное математическое определение предела оформилось в математике лишь в начале XIX в. В связи с этим потребовалось уяснить понятие функции, а также развить теорию действительного числа. До этого почти два столетия в математике существовало интуитивное представление о пределе, однако и оно оказалось чрезвычайно плодотворным, так как внесло в математику совершенно новый метод рассуждений — *метод пределов*. Применение и развитие метода пределов привели к созданию дифференциального и интегрального исчислений, математического анализа.

Суть метода состоит в том, что для определения неизвестной величины находят ее приближения, при этом не одно-два, а неограниченное число приближений. Если эти приближения становятся все более точными, отличаются от определяемой величины все меньше и меньше, то сама величина находится как предел этих приближений.

Подобных рассуждений древнегреческая математика не знала. Если в ней и рассматривались приближения, как, например, у Евдокса и Архимеда в их «методе исчерпывания» при определении площадей и объемов, то число этих приближений было невелико, и, кроме того, установление равенства между искомой и уже известной площадью (или объемом) проводилось элементарными геометрическими методами. Теперь же, в методе пределов, строятся бесконечные приближения и неизвестная величина определяется как предел.

Метод пределов не возник в математике сам собой, он оформлялся постепенно, как результат труда многих математиков, которые начали рассматривать новые для своего времени задачи, не решаемые элементарными методами. Это были задачи определения размеров тел и центра их тяжести, нахождения длин кривых, построения касательных к кривым, установления мгновенной скорости при неравномерном движении. Со временем накапливался опыт и вырабатывались решения подобных задач в общей постановке, например задач, когда требовалось определить мгновенную скорость не в данном конкретном движении, а в любом, если только была известна зависимость пути от времени. В результате на основе понятия предела были сформированы новые понятия интеграла и производной, создан математический анализ. Очевидно, что применение метода пределов потребовало развития способов вычисления пределов, установления правил действий с пределами, т. е. создания теории пределов. Основным в этой теории стало понятие бесконечно малой — переменной, предел которой равен нулю. В этот период математический анализ назывался анализом бесконечно малых.

lim — это первые буквы латинского слова *limes*, которое означает предел. Слово «limes» для обозначения предела впервые употребил И. Ньютон, символ «lim» ввел французский ученый С. Люилье в 1786 г., а выражение « $\lim\limits_{n\to\infty}$ » первым записал англичанин У. Гамильтон в 1855 г.

Примеры

1. Найти предел $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x+4}{x^2+3}$.

Используя теоремы о пределах, находим

$$\lim_{x\to3}\frac{2x+4}{x^2+3}=\frac{\lim\limits_{x\to3}(2x+4)}{\lim\limits_{x\to3}(x^2+3)}=\frac{2\lim\limits_{x\to3}x+\lim\limits_{x\to3}4}{\lim\limits_{x\to3}x^2+\lim\limits_{x\to3}3}=\frac{2\cdot3+4}{3^2+3}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}.$$

2. Если предел знаменателя равен нулю, а предел числителя не равен нулю, то предел дроби равен бесконечности:

$$\lim_{x\to3}\frac{4x^2+5}{x-3}=\frac{4\cdot3^2+5}{3-3}=\infty.$$

Если имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, необходимы преобразования.

3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2}$.

Числитель и знаменатель дроби при $x=1$ равны 0. Выполним тождественные преобразования:

$$x^2-5x+4=(x-1)(x-4);\quad x^2-3x+2=(x-1)(x-2);$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-2)}.$$

Функции $\frac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2}$ и $\frac{x-4}{x-2}$ совпадают в окрестности точки $x=1$, $(x\neq 1)$, поэтому их пределы равны при $x\to 1$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-4}{x-2}=\frac{-3}{-1}=3.$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x+5}{7x^2+8x-1}=\frac{\infty}{\infty}$.

Преобразуем дробь, разделив числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x+5}{7x^2+8x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}{7+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{3+0+0}{7+0-0}=\frac{3}{7}.$$

Упражнения

1. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x+4}{x-3}$.

Ответ: 7.

2. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1+x}{3-x^3}$.

Ответ: 0.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-10x+3}{5x^2-16x+3}$.

Ответ: $\frac{4}{7}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+2}{-x^2-4x+1}$.

Ответ: –2.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Какая функция называется четной, а какая нечетной? Какова особенность в расположении графиков этих функций?

2. Каким образом можно получить график обратной функции? Приведите пример.

3. Найдите область определения функции $y=\sqrt{4-x}$.

4. Перечислите основные классы элементарных функций. Приведите примеры.

5. Сформулируйте определение предела функции при стремлении аргумента к некоторому конечному пределу и бесконечности.

6. Найдите пределы: а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3x-2}{x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+x}{x^3-1}$.

7. Запишите два замечательных предела.

8. Приведите пример, когда предел не существует.

Открытие исчисления бесконечно малых дало математикам возможность свести законы движения тел к аналитическим уравнениям.

Ж. Л. Лагранж

9. Дифференциальное исчисление

Дифференциальное исчисление – это раздел математического анализа, связанный главным образом с понятиями производной и дифференциала функции. В дифференциальном исчислении изучаются правила вычисления производных (законы дифференцирования) и применение производных к исследованию свойств функций.

Центральные понятия дифференциального исчисления – «производная» и «дифференциал» – возникли при рассмотрении большого числа задач естествознания и математики, приводивших к вычислению пределов одного и того же типа. Важнейшие среди них – физическая задача определения скорости неравномерного движения и геометрическая задача построения касательной к кривой.

9.1. Производная. Правила и формулы дифференцирования

Производная функции f в точке x_0 есть *скорость изменения* функции f в этой точке.

Геометрическое толкование производной. Производная функции f в точке x_0 определяется тангенсом угла наклона касательной, проведенной к графику функции f в точке $x = x_0$. Исходя из этого, выражение «производная от моего настроения по времени положительна» на обычный язык переводится как «мое настроение улучшается».

Задача-шутка. Какой знак имеет производная от настроения по расстоянию до кресла зубного врача?

Легко показать, что, приравнивая к нулю производную, можно найти те значения независимой переменной, при которых функция может иметь *максимум* или *минимум*, т. е. *экстремум*.

В «критических» (подозрительных на максимум и минимум) точках, где функция достигает максимума, производная переходит от положительных значений к отрицательным (или вторая производная — производная от производной — отрицательна); для минимума — все наоборот.

Операцию получения функции $f'(x)$ из функции $f(x)$ называют *дифференцированием* функции $f(x)$.

Техника нахождения производных (или, как часто говорят, техника дифференцирования) сравнительно простое и более легкое дело, чем, например, решение алгебраических уравнений. Формулы для производных нередко оказываются даже проще (или, во всяком случае, не сложнее), чем формулы для самих исходных функций.

Основные правила дифференцирования:

$(C)'=0$, здесь C — const; $(CU)'=CU'$; $(U+V)'=U'+V'$;

$(UV)'=U'V+UV'$; $\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'V-V'U}{V^2}$; «цепное правило».

Для нахождения производных не надо ждать вдохновения, не нужны также изобретательность, выдумка, озарение, ибо задача всегда решается с помощью ряда простых правил.

Основные формулы для производных:

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1};\qquad (\sin x)'=\cos x;$$

$$(a^x)'=a^x\ln a;\qquad (\cos x)'=-\sin x;$$

$$(e^x)'=e^x;\qquad (\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a};\qquad (\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x};$$

Примеры

1. Пусть $y = 3x^2 - 6x + 5$.
Тогда $y' = (3x^2)' - (6x)' + (5)' = 3 \cdot 2x - 6 \cdot 1 + 0 = 6x - 6$.

2. Пусть $y = -4x^3 + 2x^{-2} - 3$.

Тогда $y' = -4 \cdot 3x^2 + 2 \cdot (-2)x^{-3} - 0 = -12x^2 - 4x^{-3}$.

3. Найти y', если $y = \dfrac{7x^3 + 5}{x - 2}$.

Положив $U = 7x^3 + 5$, $V = x - 2$ и используя приведенную выше формулу, имеем

$$y' = \left(\frac{7x^3 + 5}{x - 2}\right)' = \frac{(x-2)(7x^3+5)' - (7x^3+5)(x-2)'}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{(x-2)(7 \cdot 3x^2) - (7x^3+5) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{21x^3 - 42x^2 - 7x^3 - 5}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{14x^3 - 42x^2 - 5}{(x-2)^2}.$$

4. Пусть $f = (3x^2+5)(2x-4)$. Требуется найти $f'(x)$, и в частности $f'(0)$.

Здесь $U = 3x^2 + 5$, $V = 2x - 4$.
Тогда $U' = 3 \cdot 2x + 0 = 6x$, $V' = 2 - 0 = 2$ и

$$f'(x) = UV' + VU' = (3x^2+5) \cdot 2 + (2x-4) \cdot 6x = 18x^2 - 24x + 10,$$

в частности

$$f'(0) = \frac{df}{dx}\Big|_{x=0} = 10.$$

Упражнения. Найти производные функций:

1. $y = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$.

Ответ: $y' = 12x^2 - 4x + 1$.

2. $y = (x-1)(2x+3)$.

Ответ: $y' = 4x + 1$.

3. $y = 3x - 5(x+2)(3-x)$.

Ответ: $y' = 10x - 2$.

4. $y = \dfrac{x-1}{x^2+2}$.

Ответ: $y' = -\dfrac{x^2 - 2x - 2}{(x^2+2)^2}$.

5. $y = \dfrac{2x-3}{4-5x}$ при $x = 1$.

Ответ: $y'(1) = -7$.

9.2. Приложения производной

9.2.1. Исследования на экстремум

Пусть нам дана некоторая функция $y = f(x)$. Как известно, функция графически изображается в виде кривой линии. В общем случае кривая на одних участках поднимается, на других — опускается. В точке перехода от подъема к падению ордината кривой достигает наибольшего значения сравнительно с близкими точками (*максимум*), а в точке перехода от падения к подъему ордината достигает наименьшего значения (*минимум*).

Характерные особенности хода изменения функции (подъем, падение и точки перехода) можно определить с помощью первой производной. Так, если функция возрастает, то ее производная положительна ($y' > 0$), если убывает, то ее производная отрицательна ($y' < 0$). Следовательно, в точках *экстремума*, т.е. максимума и минимума, производная меняет знак. При условии непрерывности производной эта перемена знака не может произойти иначе, как при переходе производной через нуль. Следовательно, для определения точки экстремума функции $f(x)$ прежде всего разыскиваются те значения x, для которых $f'(x) = 0$.

Таким образом, можно предложить следующее *правило* нахождения точек экстремума функции.

1. Найти производную от данной функции.

2. Приравнять производную нулю и решить получающееся таким образом уравнение. Действительные корни его дают возможные точки экстремума функции.

3. Относительно каждого из найденных действительных корней исследовать, меняет ли знак производная при переходе независимого переменного через значение рассматриваемого корня. Для этого надо определить знаки производной для зна-

чений аргумента немного меньших и немного больших, нежели исследуемый корень. Если производная в первом случае положительна, а во втором отрицательна, то рассматриваемое значение аргумента дает точку максимума; если, наоборот, производная меняет знак «—» на «+», то рассматриваемый корень дает точку минимума. Если же знак производной не меняется, то при исследуемом корне не имеется ни максимума ни минимума.

4. Вычислить максимальные и минимальные значения функции.

Существование экстремума может быть установлено при помощи другого признака, требующего определения знака второй производной данной функции при исследуемом значении аргумента. В этом случае в п. 3 находим вторую производную и подставляем в нее вместо аргумента поочередно корни решенного уравнения. Если вторая производная будет положительна, то исследуемое значение независимого переменного дает точку минимума; если вторая производная отрицательна — точку максимума; если вторая производная обращается в нуль, то вопрос остается открытым, и тогда следует обратиться к первому способу исследования функции на максимум и минимум.

Примеры

1. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.

Находим производную

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3).$$

Приравнивая ее нулю и решая соответствующее квадратное уравнение, получаем корни производной:

$$x_1 = 1 \text{ и } x_2 = 3.$$

Отсюда

$$f'(x) = 3(x-1)(x-3).$$

Исследуем, как изменяется знак $f'(x)$ вблизи значения $x = 1$.

При любом достаточно малом положительном числе h имеем $f'(1-h)>0$, $f'(1+h)<0$. Следовательно, функция $f(x)$ при $x=1$ имеет максимум, равный $f(1)=9$. Аналогично, для значения $x=3$ получим $f'(3-h)<0, f'(3+h)>0$. Поэтому функция $f(x)$ при $x=3$ имеет минимум, причем $f(3)=5$.

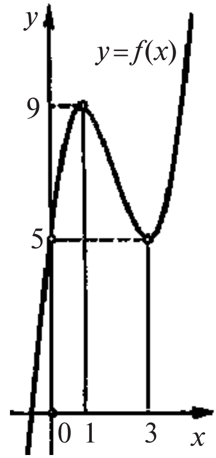


График функции $y=x^3-6x^2+9x+5$ изображен на рисунке.

2. Число 64 разбить на две части, которые в произведении давали бы максимум.

Обозначим две искомые части a и b. Тогда $a+b=64$. Требуется найти максимум произведения, т. е. исследовать на экстремум функцию $y=a\,b$, или $y=a\,(64 - a)$.

Возьмем производную $y'=64-2a$ и приравняем ее к нулю: $64 - 2a=0$, отсюда находим, что $a=32$. Тогда $b=64 - a=64 - 32=32$, а $y_{\max}=ab=32\cdot 32=1024$.

Упражнения

1. Нужно огородить с трех сторон участок прямоугольной формы, прилегающий к длинной стене. Из имеющегося материала можно сделать забор длиной 120 м.

Каковы должны быть размеры забора, чтобы площадь, обнесенная им, была наибольшей?

Ответ: 30 и 60 м.

2. Прямоугольный участок площадью 600 м^2 требуется огородить забором. Вследствие дополнительной отделки каждый погонный метр забора, выходящего на улицу, в 2 раза дороже метра забора, отделяющего участок от соседей. При какой длине забора, выходящего на улицу, стоимость его будет минимальной?

Ответ: 20 м.

3. Исследовать на экстремум функцию $y=x^3-9x^2+24x-12$.

Ответ: $y_{\min}=y(4)=4$; $y_{\max}=y(2)=8$.

9.2.2. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Чтобы найти наибольшее значение непрерывной функции в промежутке $[a, b]$, надо определить все максимумы и значения на концах промежутка $f(a)$ и $f(b)$. Наибольшее из этих чисел и будет наибольшим значением функции $f(x)$ в указанном промежутке. Наименьшее значение функции находится аналогично.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ на отрезке [—4, 4].

Найдем критические точки, лежащие внутри отрезка [—4, 4]. Производная $y' = 3x^2 - 6x - 9$. Решив уравнение $3x^2 - 6x - 9 = 0$, найдем критические точки $x_1 = —1$, $x_2 = 3$.

Значения функции в критических точках: $y(—1) = 40$, $y(3) = 8$.

Вычислим значения функции на концах отрезка [—4, 4]: $y(—4) = —41$, $y(4) = 15$.

Сравнивая вычисленные значения функции, отметим, что наибольшее значение функции на отрезке [—4, 4] равно 40 и достигает в критической точке $x = —1$, а наименьшее значение равно —41 при $x = —4$.

Примечание. Если критическая точка оказывается вне исследуемого отрезка, то, естественно, из дальнейшего анализа она исключается.

Упражнения. Найти наибольшее и наименьшее значения функций:

1. $y = x^2 - 4x + 3$;

2. $y = -x^3 + 9x^2 - 24x + 10$ на отрезке [0, 3].

Ответ: 1. $y_{\text{наим}} = y(2) = -1$; $y_{\text{наиб}} = y(0) = 3$;

2. $y_{\text{наим}} = y(2) = -10$; $y_{\text{наиб}} = y(0) = 10$.

9.2.3. Вычисление пределов: раскрытие неопределенностей (правило Лопиталя)

Рассмотрим отношение

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a. Может случиться, что при $x \to a$ обе функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ стремятся к 0 или ∞, т. е. эти функции одновременно являются или бесконечно малыми, или бесконечно большими при $x \to a$. Тогда говорят, что в точке a функция $f(x)$ имеет неопределенность, соответственно, вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. В этом случае, используя производные $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$, можно сформулировать простое правило для нахождения предела функции $f(x)$ при $x \to a$, т. е. дать рецепт для раскрытия неопределенности такого вида.

Это правило обычно связывают с именем французского математика Лопиталя, впервые опубликовавшего его:

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Пример. Раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$.

При $x = 2$ числитель и знаменатель рассматриваемой дроби обращается в нуль. Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, воспользуемся правилом Лопиталя и получим

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^3 - 8)'}{(x^2 - 4)'} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \to 2} x = 3.$$

Упражнение. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{\sin x}$.

Ответ: $\ln 2$.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Запишите формулы дифференцирования основных элементарных функций.

2. Найдите производную функции $y = e^3 \cos x$.

3. Найдите производную многочлена $y = x^5 - 4x^2 + 2x^{-3} + 7$.

4. Найдите производную функции $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$; вычислите $f'(1)$.

5. Найдите $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$.

6. Каковы признаки возрастания и убывания функции?

7. Исследуйте на экстремум функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$.

8. Приведите пример, показывающий, что обращение производной в нуль не является достаточным условием экстремума функций.

9. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$ в промежутке $0 \le x \le 3$.

Смысл – там, где змеи интеграла
Меж цифр и букв, меж d и f!

В. Брюсов

10. Интегральное исчисление

Интегральное исчисление – это раздел математического анализа, в котором изучаются интегралы, их свойства, способы вычисления и приложения. Вместе с дифференциальным исчислением оно составляет основу аппарата математического анализа.

Интегральное исчисление возникло после рассмотрения большого числа задач естествознания и математики. Важнейшие из них – физическая задача определения пройденного за данное время пути по известной, но, быть может, переменной скорости движения и значительно более древняя задача вычисления площадей и объемов геометрических фигур.

Центральным в интегральном исчислении является понятие интеграла, которое, однако, имеет две различные трактовки, приводящие соответственно к понятиям неопределенного и определенного интегралов. Рассматриваемая в интегральном исчислении математическая операция (обратная к дифференцированию) называется интегрированием или, точнее, неопределенным интегрированием.

10.1. Неопределенный интеграл. Методы интегрирования

Интегрирование функции $f(x)$ — это операция отыскания (для данной функции $f(x)$) так называемой *первообразной* функции.

Первообразной является такая функция $F(x)$ по отношению к которой исходная функция $f(x)$ производна, т. е. $f(x) = F'(x)$. Например, для функции $f(x) = 2x^2 - 3x$ первообразной будет $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$, точнее, *семейство* первообразных $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная. Действительно, легко убедиться, что

$$\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C\right)' = 2x^2 - 3x.$$

Переход $f(x) \to [F(x) + C]$ есть *операция интегрирования* функции $f(x)$.

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Геометрически неопределенный интеграл представляет семейство плоских кривых, смещенных друг относительно друга вдоль вертикальной оси.

Таблица основных интегралов (табл. 10) получается из основных формул дифференциального исчисления путем прямого их обращения.

Таблица 10

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \, (n \neq -1)$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

В табл. 11 приведены методы интегрирования.

Таблица 11

Методы	Схема (формула)
Разложения	$\int f(x)dx \Rightarrow$ сумма табличных интегралов
Подстановки (замены переменной)	$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt$
Интегрирования по частям	$\int UdV = UV - \int VdU$

Примечания

1. Интегрирование, как правило, значительно сложнее дифференцирования. Оно не является механическим, требует большей практики и изобретательности.

2. Интегрирование — действие, обратное дифференцированию, и его можно проверить дифференцированием.

3. Некоторые обратные действия в математике не однозначны и не всегда выполнимы; здесь это приводит к существованию так называемых неберущихся интегралов.

Примеры

Метод разложения.

$$\int(x^2+7x-5)dx = \int x^2dx + \int 7xdx - \int 5dx = \frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}-5x+C.$$

Проверка: $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}-5x+C\right)' = \frac{3x^2}{3}+\frac{14x}{2}-5 = x^2+7x-5.$

Метод подстановки (замены переменной). Требуется найти интеграл $\int(4x-3)^2dx.$

Введем новую переменную, положив $u=4x-3,\ du = (4x-3)'dx = 4dx,\ dx=\frac{du}{4}.$ Внесем эти выражения в интеграл

$$\int u^2\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int u^2du = \frac{1}{4}\frac{u^3}{3}+C.$$

Сделаем обратную замену

$$\frac{1}{4}\frac{u^3}{3}+C = \frac{(4x-3)^3}{12}+C.$$

Проверка: $\left(\frac{(4x-3)^3}{12}+C\right)' = \frac{3(4x-3)^2 4}{12} = (4x-3)^2.$

Интегрирование по частям. Требуется найти интеграл $\int xe^x dx.$

Положим $U=x,\ dV=e^x dx$. Тогда $dU=dx,\ V=e^x$ и

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Проверка: $(xe^{x}-e^{x}+C)'=xe^{x}+e^{x}-e^{x}=xe^{x}$.

Упражнения. Найти:

1. x^6dx; **2**. $\int(x-x^3)dx$; **3**. $\int x^2(x^2+3)\,dx$; **4**. $\int \sin 7x dx$; **5**. $\int \cos(3x+7)dx$; **6**. $\int x\ln x\,dx$ $(U=\ln x)$.

Ответ: **1**. $\frac{x^7}{7}+C$; **2**. $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+C$; **3**. $\frac{x^5}{5}+x^3+C$; **4**. $-\frac{1}{7}\cos 7x+$ $+C$; **5**. $\frac{1}{3}\sin(3x+7)+C$; **6**. $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$.

10.2. Определенный интеграл

Интеграл можно определить как предел интегральных сумм. Так, определенный интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=S.$$

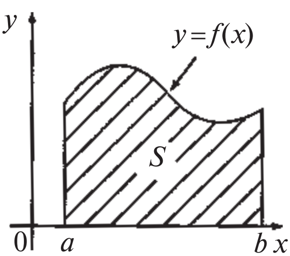


Рис. 26

С помощью интегральных сумм можно приближенно вычислять самые разные величины (рис. 26).

Интегралом от a до b функции f называется приращение первообразной F этой функции: $F(b)-F(a)$ — формула Ньютона—Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Примеры. Вычислить интегралы:

1. $\int_1^2 x^2dx$;

2. $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})dx.$

1. $\int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_1^2 = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}.$

2. $$\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})dx = \int_0^8 \sqrt{2x}dx + \int_0^8 \sqrt[3]{x}dx = \frac{1}{2}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^8 + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_0^8 =$$

$$= \frac{16^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{3}0 + \frac{3}{4}8^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}0 = \frac{100}{3}.$$

Упражнение. Найти числа, получающиеся при использовании в интеграле $\int_1^2 f(x)\,dx$ следующих функций:

1. $f(x) = \frac{1}{x^2}$; **2.** $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

Ответ: **1.** $\frac{1}{2}$; **2.** $\frac{3}{8}$.

Пример. Вычислить площадь S, ограниченную кривой $y = \sin x$ и осью абсцисс, если $x \in [0, \pi]$.

$$S = \int_0^\pi \sin x\, dx = -\cos x \,|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -((-1) - 1) = 2 \text{ ед.}^2.$$

Упражнение. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$, осью Ox и прямыми $x = 1$ и $x = 4$.

Ответ: 24.

Пример. *Интегрирование по частям* в определенном интеграле:

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x\, dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \sin x\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - 0\cos 0\right) + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Здесь $U = x$, $dU = dx$, $dV = \sin x\, dx$, $V = -\cos x$.

Упражнения. Найти интегралы:

1. $\int_1^e x^2 \ln x\, dx$; **2**. $\int_0^{\pi/4} x\cos 2x\, dx$.

Ответ: **1**. $\frac{2e^3+1}{9}$; **2**. $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Запишите свойства первообразной.

2. Выпишите основные табличные интегралы по схеме $\int f(u)du = F(u) + C$.

3. Приведите примеры «неберущихся» интегралов.

4. Найдите интегралы: а) $\int (x+1)dx$; б) $\int \sin(2x+3)dx$; в) $\int \ln x\, dx$.

5. Дайте определение определенного интеграла. Каков его геометрический смысл?

6. Сформулируйте и запишите основные свойства определенного интеграла.

7. Вычислите интеграл $\int_2^3 (2x-1)^3\, dx$.

8. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x - x^2$ и $y = 0$. Сделайте чертеж.

Математик, оперируя множеством символов,
явно имея дело с чисто формальными истинами,
тем не менее может достичь бесконечно важных
результатов для описания физического мира.

К. Пирсон

11. Дифференциальные уравнения

Многочисленные задачи естествознания, техники и других областей знания сводятся к тому, что по заданным свойствам некоторого процесса или явления необходимо найти математическую модель самого процесса в виде формулы, связывающей переменные величины, т.е. в виде функциональной зависимости. Уравнения, в которых содержатся производные или дифференциалы искомых функций, называются *дифференциальными*. Они являются мощным средством познания окружающего нас мира. Дифференциальное уравнение – это как бы мгновенный снимок процесса в данный момент времени; интегрируя дифференциальное уравнение, мы по мгновенным снимкам восстанавливаем течение процесса в целом.

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, в котором неизвестной является функция одного независимого переменного, причем в уравнение входят производные различных порядков. В самом общем виде ДУ записывается так:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, \quad y^{(n)}) = 0.$$

Порядок старшей производной, входящей в состав уравнения, называется *порядком* уравнения.

Примеры. Дифференциальные уравнения: а) первого порядка: $y' + x^2 y = x^2 + 1$, $\frac{dy}{dx} = xy$, $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$; б) второго порядка: $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y'' = xy'$, $y'' + yy' = 0$; в) третьего порядка: $xy''' + yy' = 0$ и т.д.

Решением ДУ называется функция $y=\varphi(x)$, обращающая это уравнение в тождество.

Пример. Функция $y=x^2$ является решением дифференциального уравнения $xy''-y'=0$. Действительно, $y'=2x$, $y''=2$; подставляя эти значения в уравнение $xy''-y'=0$, получаем $2x-2x\equiv 0$, т. е. тождество.

График решения называется интегральной кривой, а процесс нахождения решений — интегрированием ДУ. Следует отметить, что методы решения ДУ разнообразны и зависят от вида (первого порядка, второго и т.д.), типа (с разделяющимися переменными, однородные, линейные и т.д.).

Использование операции интегрирования связано с появлением произвольной постоянной. Если действие повторяется *n* раз, то, очевидно, и в решении будет содержаться *n* произвольных постоянных.

Общим решением ДУ называется функция вида $y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Примеры. 1. Уравнение $y''-3y'+2y=0$ имеет общее решение $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$. **2**. Уравнение $y''+y=0$ имеет общее решение $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. (Проверьте!).

Если постоянным C_i придать конкретные числовые значения, то полученная функция называется *частным решением*. Например, если положить в последнем примере $C_1=0$ и $C_2=1$, то получим $y=\sin x$ — частное решение.

Задача нахождения частного решения ДУ, удовлетворяющего начальному условию $y=y_0$ при $x=x_0$, называется *задачей Коши* (по имени французского математика).

Примеры

1. *Задача о законе охлаждения*. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности температур тела и воздуха, т.е.

$$\frac{du}{dt}=k(u-u_0),$$

где t — время; u — температура тела; u_0 — температура воздуха, которая во время опыта считается неизменной; k — коэффициент пропорциональности.

Тело в начале опыта имело температуру 100°С. Через 20 мин. его температура стала 60°С. Узнать, через сколько минут температура тела станет равной 30°С, если известно, что температура воздуха во время опыта оставалась равной 20°С.

В нашей задаче $u_0 = 20$, поэтому сформулированный закон запишется

$$\frac{du}{dt} = k(u - 20).$$

Это — дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Перепишем его, разделив переменные:

$$\frac{du}{u - 20} = k\,dt.$$

Интегрируя левую и правую части, будем иметь $\ln(u - 20) = kt + C$ или, потенцируя, $u - 20 = e^C e^{kt}$.

Используем начальные условия: подставим $t = 0$ и $u = 100$, в результате получим уравнение $100 - 20 = e^C e^{k \cdot 0}$. Отсюда $e^C = 80$, и уравнение принимает вид

$$u = 20 + 80e^{kt}.$$

Это уравнение еще не позволяет вычислить искомое время, так как в нем содержится неизвестный коэффициент k. Для его определения используем результаты наблюдения, т.е. что при $t = 20$ температура $u = 60$. Подставляя эти данные в уравнение, получим $60 = 20 + 80e^{k \cdot 20}$; $40 = 80(e^k)^{20}$; $(e^k)^{20} = \frac{1}{2}$, откуда $e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}$. Следовательно, уравнение можно записать в виде

$$u = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

Это и есть закон охлаждения в зависимости от времени. Теперь можно получить ответ на поставленный в задаче вопрос: положим $u = 30$, тогда $30 = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. Решив это уравнение, найдем $10 = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$; $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$; $\frac{t}{20} = 3$; $t = 60$. Таким образом, тело за 60 мин. охладится до 30°С.

2. *Задача о законе естественного роста.* Закон естественного роста — это закон, при котором скорость роста вещества прямо пропорциональна его количеству. Найдем формулу для определения изменения количества вещества y в зависимости от времени x, считая, что в начальный момент при $x=0$ количество вещества было y_0.

Используя физический смысл производной, этот закон можно записать так:

$$\frac{dy}{dx}=ky,$$

где k — коэффициент пропорциональности. Уравнение описывает многие процессы «размножения». Решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y=y_0$ при $x=0$, имеет вид $y=y_0e^{kx}$. (Проверьте!).

Представляет интерес то, что по этой формуле, выражающей закон «естественного роста», происходит и «размножение» числа нейтронов в ядерных реакциях, и размножение числа бактерий, и рост населения и др.

Упражнения. Найдите частные решения уравнений:

1. $xdx=dy$, $y(1)=0$, т. е. $x=1$ при $y=0$.

2. $yy'-x=0$, $y(2)=1$.

3. $y'=y/x$, $y(3)=4$.

Ответ: **1**. $y=\dfrac{x^2-1}{2}$; **2**. $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=\dfrac{3}{2}$; **3**. $y=\dfrac{4}{3}x$.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Какое уравнение называется дифференциальным? Что называется порядком дифференциального уравнения?

2. Какое решение дифференциального уравнения называется общим и какое — частным? Каков их геометрический смысл?

3. Определите порядок дифференциальных уравнений.

а) $y^4y''=xy'+3$; б) $y^2+5y'+4=0$; в) $2y''-y^3=x^2$.

Сколько независимых произвольных постоянных должно входить в общие решения этих уравнений?

4. Показать, что функция $y=(C_1+C_2x)e^x$ есть решение уравнения $y''-2y'+y=0$.

5. Решите задачу Коши: $yy'-x=0$; $y=4$ при $x=-2$.

6. Найти частное решение уравнения $y'=x/y$, проходящее через точку (4, 0).

Существует еще одна причина высокой репутации математики: именно математика дает... наукам определенную меру уверенности в выводах, достичь которой без математики они не могут.

А. Эйнштейн

12. Случайные события

Теорию вероятностей можно определить как раздел математики, в котором изучаются закономерности, присущие массовым случайным явлениям. Методы теории вероятностей широко применяются при математической обработке результатов измерений, а также в экономике, статистике, страховом деле, массовом обслуживании.

12.1. Общие сведения

Первые работы, в которых зарождались основные понятия теории вероятностей, представляли собой попытки создать теорию азартных игр (Б. Паскаль, П. Ферма, Х. Гюйгенс). Следующий этап развития связан с именем Я. Бернулли. Дальнейшими успехами теория вероятностей обязана А. Муавру, П. Лапласу, К. Гауссу, С. Пуассону и др. Наиболее плодотворный период связан с именами П. Чебышева и его учеников — А. Маркова и А. Ляпунова, последующее развитие — с именами С. Бернштейна, А. Хинчина, А. Колмогорова, В. Романовского, Н. Смирнова, Б. Гнеденко и др.

Концепция детерминированного подхода к явлениям окружающего мира долгое время преобладала как в организации научных исследований, так и в представлении их результатов. В основе этой концепции лежит механистическое представление о том, что при сохранении неизменными внешних условий, повторении некоторых определенных действий неизбежно можно прийти к прежнему результату. Эксперимент называется детерминированным, если его повторение не приводит к новым результатам. В противном случае, если повторение эксперимента приводит к другому результату, эксперимент называется случайным. Такое название связано с тем, что типичными экспериментами, в которых наблюдается указанная ситуация (повторные действия могут давать разные результаты), являются эксперименты, заключающиеся в подбрасывании монеты или игрального кубика, в раздаче колоды карт и др. В каждом из них мы сталкиваемся с неоднозначностью результата эксперимента. Так, монета может упасть вверх «гербом» или «решкой», а кубик — любой из шести граней, причем невозможно заранее предугадать, что конкретно произойдет при подбрасывании. Поэтому говорят, что результат зависит от случая, отсюда и название эксперимента.

Задача теории вероятностей заключается в построении вероятностных моделей случайных экспериментов. Вероятностная модель позволяет придать строгий математический смысл таким словам, как «случайность», «событие», «вероятность», «правдоподобный» и др., и оценить шансы на появление различных результатов, возможных в данном случайном эксперименте.

Конечно, надо отдавать себе отчет в том, что, как всякая модель, вероятностная модель тоже является некоторой идеализацией описываемого эксперимента — она не предназначена для воспроизведения всех деталей, а воплощает лишь основные черты явления. В частности, при подбрасывании монеты мы предполагаем, что результатом эксперимента не может быть пропажа монеты или приземление ее на ребро. Кроме того, чрезвычайно важным в теории вероятностей является предположение о принципиальной возможности многократного повторения случайного эксперимента.

Если такой возможности нет, то построение вероятностной модели не имеет смысла. Можно сказать, что содержащаяся в вероятностной модели конкретная информация о самых разных ситуациях, которые могут возникнуть при данном случайном эксперименте, «разворачивается» лишь в случае его многократного повторения. Так, можно утверждать, что если подбросить «правильную» монету 1000 раз, то число выпадений герба будет мало отличаться от 500.

12.2. Событие и вероятность: основные понятия

Опыт, эксперимент, наблюдение явления называются испытанием. В качестве примера можно привести такие испытания, как, например: бросание монеты, выстрел из винтовки, бросание игральной кости (кубика). Результат (исход) испытания называется событием. К событиям можно отнести: выпадение герба или выпадение цифры, попадание в цель или промах, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости.

События бывают трех видов: *достоверные*, *случайные* и *невозможные*. Для их обозначения используются большие буквы латинского алфавита: A, B, C и др.

Ответ на вопрос, считать ли данное событие случайным, зависит от имеющейся информации. Например, появление поезда на станции в промежутке времени от 18.00 до 18.10 — событие случайное, с точки зрения пассажира, не знающего расписания, и неслучайное для пассажира, знающего расписание. При бросании монеты, если знать с достаточной точностью массу, начальные координаты и скорость монеты, можно (в принципе) рассчитать ее траекторию и, следовательно, предсказать, какой стороной она упадет на стол.

Определение. Два события называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Пример. Испытание: однократное бросание игральной кости. Событие A — появление трех очков, событие B — появление нечетного числа очков. События A и B совместные.

Определение. Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Пример. Испытание: однократное бросание монеты. Событие A — выпадение «герба», событие B — выпадение цифры. Эти события несовместны, так как появление одного из них исключает появление другого. Или, например, при одном бросании кости появление не менее трех очков и при этом появление четной грани — события совместные, а появление цифры 3 и при этом появление четной грани — события несовместные.

Определение. Два события A и B называются *противоположными*, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит.

Событие, противоположное событию A, обозначают через $\neg A$.

Пример. Испытание: бросание монеты. Событие A — выпадение «герба», событие B — выпадение цифры. Эти события противоположны, так как исходами бросания могут быть лишь они и появление одного из них исключает появление другого, т. е. $A = \neg B$ или $\neg A = B$.

Определение. Событие называется *достоверным*, если в этом испытании оно является единственно возможным исходом, и *невозможным*, если оно заведомо не может произойти.

Пример. Испытание: извлечение шара из урны, в которой все шары белые. Событие A — вынут белый шар — достоверное событие; событие B — вынут черный шар — невозможное событие.

Следует отметить, что достоверное и невозможное события в одном испытании являются противоположными. Достоверное событие не может не произойти (например, выпадение не менее одного очка при бросании кости); невозможное событие не может произойти (например, выпадение семи очков).

Определение. Событие A называется *случайным*, если оно объективно может наступить или не наступить в проводимом испытании.

Пример. Событие A_4 — выпадение четырех очков при бросании игральной кости — случайное. Оно может наступить, но может и не наступить в данном испытании.

12.3. Определение вероятности

С понятием вероятности случайных событий мы встречаемся в повседневной деятельности, когда оцениваем шансы появления такого рода событий. Существует три определения вероятности:

1) классическое $P(A)=\dfrac{M}{N}$;

2) статистическое $P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{m}{n}$;

3) геометрическое $P(A)=\dfrac{\text{мера } A}{\text{мера } \Omega}$.

Вероятность события A — число $P(A)$, характеризующее возможность появления этого события. По определению, $0 \le P(A) \le 1$. Вероятность невозможного события равна нулю, вероятность достоверного события равна единице. Иногда вероятность выражают в процентах.

В некоторых простейших ситуациях вероятность случайного события можно указать сразу: при бросании (симметричной!) монеты естественно считать оба возможных исхода (изображение герба или цифра) имеющими равную вероятность, т. е. 0,5, или 50 %. При бросании игральной кости появление любой цифры от 1 до 6 — равновероятные события с вероятностью 1/6 каждое.

Вообще, если данный опыт может иметь n исходов и нет оснований считать появление какого-либо исхода более вероятным, чем другие, полагают вероятность каждого исхода равной $1/n$. Если событие A происходит в результате одного из m равновероятных исходов, то $P(A) = m/n$.

Например, появление нечетной грани при бросании кости (событие A) происходит при выпадении 1, или 3, или 5, т. е. здесь $m = 3$, поэтому $P(A) = 3/6 = 1/2$. Рассчитанную таким образом вероятность называют *априорной*. В более сложных ситуациях расчет вероятностей случайных событий может производиться на основании предположений о законах, управляющих деталями соответствующих процессов.

Примеры

1. Из колоды карт наудачу выбирают одну карту. Требуется определить вероятность того, что эта карта пиковой масти.

Считая, что в колоде 36 карт, общее число исходов имеем $n = 36$. Всего карт пиковой масти 9, поэтому $m = 9$.

Итак, $P(A) = m/n = 9/36 = 1/4$.

2. Из пяти кубиков с буквами *А*, *Б*, *Д*, *Е*, *С* наугад выбирают один за другим три кубика и располагают в ряд (в порядке появления) слева направо. Какова вероятность, что получится слово «*САД*»?

Выбор трех кубиков из имеющихся пяти можно осуществить A_5^3 способами, так как порядок кубиков имеет значение. Вычисляем:

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Значит, число всех возможных элементарных событий $n = 60$. Из этих событий только одно благоприятствует событию A — получено слово «*САД*», т.е. $m = 1$. Следовательно, $P(A) = m/n = 1/60$.

3. В урне лежат 10 шаров, из них 3 белых, 4 красных и 3 черных. Какова вероятность того, что из пяти наугад взятых шаров окажется 2 белых, 2 красных и один черный?

В данном случае общее число шаров равно 10. Из них 5 шаров можно выбрать n различными способами, где

$$n = C_{10}^{5}\ \frac{10!}{(10-5)!\cdot 5!} = \frac{10!}{5!\cdot 5!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{5!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 7\cdot 4\cdot 9 = 252.$$

Определим число m событий, благоприятствующих появлению интересующего нас события: одновременный выбор 2 белых шаров (из 3 имеющихся), 2 красных (из 4 имеющихся) и одного черного (из 3 имеющихся). Получим:

$$m = C_{3}^{2}\cdot C_{4}^{2}\cdot C_{3}^{1} = \frac{3!}{(3-2)!\,2!}\cdot\frac{4!}{(4-2)!\,2!}\cdot\frac{3!}{(3-1)!\,1!} = \frac{6\cdot 24\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 2} = 54.$$

Следовательно, искомая вероятность вычисляется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{54}{252} = \frac{3}{14}.$$

Наряду с классическим определением, используется так называемое статистическое ее определение. Отношение $p = m/n$ числа m появлений события A при n испытаниях называется *частотой* этого события. С ростом n частота события в определенном смысле приближается к вероятности P этого события. Пусть производятся независимые испытания, при каждом из которых вероятность события A неизменна. Справедливо утверждение, называемое *законом больших чисел*, или *теоремой Бернулли*. Оно означает, что если число испытаний достаточно велико, то с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, отличие частоты события A от его вероятности меньше любого наперед заданного положительного числа. Так, много раз бросая монету, мы почти наверняка будем получать примерно равные частоты выпадений изображения герба и цифры.

Схематически различные варианты событий можно выразить так:

Увеличение неопределенности события — *Увеличение определенности события*

$$P=0 \longleftarrow P=0{,}5 \longrightarrow P=1$$

Невозможность — Определенность

12.4. Алгебра событий

Определение. *Суммой* событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении по крайней мере одного из событий A или B.

Теорема сложения вероятностей: для несовместных событий $P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$; для совместных событий $P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Аналогично определяется сумма большего числа событий. Например, появление четной грани кости есть сумма трех событий: выпадения 2, или 4, или 6.

Пример. Испытание: стрельба двух стрелков (каждый делает по выстрелу). Событие A — попадание в мишень первым стрелком, событие B — попадание в мишень вторым стрелком. Суммой событий A и B будет событие $C = A + B$, состоящее в попадании в мишень по крайней мере одним стрелком.

Упражнение. В урне находятся 2 белых, 1 черный, 3 синих и 6 красных шаров. Найти вероятность того, что извлекаемый шар будет: а) белым или черным; б) белым, черным или синим; в) черным, синим или красным; г) белым, черным, синим или красным?

Ответ: а) 1/4; б) 1/2; в) 5/6; г) 1.

Определение. *Произведением* событий A и B называется событие $C = AB$, состоящее в том, что в результате испытания произошли и событие A, и событие B.

Теорема умножения вероятностей: для независимых событий $P(A \text{ и } B) = P(AB) = P(A) \times P(B)$; для зависимых событий $P(A \text{ и } B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$.

Аналогично произведением конечного числа событий $A_1, A_2, \dots, A_k$ называется событие $A = A_1 A_2, \dots, A_k$, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события.

В предыдущем примере произведением событий A и B будет событие $C = AB$, состоящее в попадании в мишень двух стрелков.

Произведение несовместных событий — событие невозможное. Сумма и произведение событий аналогичны соответственно объединению и пересечению множеств (см. гл. 2). Вероятность суммы $A + B$ несовместных событий A и B равна сумме вероятностей событий A и B:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

В общем случае

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Пример. Два стрелка стреляют в одну цель, причем вероятность поражения цели первым стрелком 0,8, а вторым — 0,5. Стрелки стреляют по команде (т.е. одновременно) один раз. Какова вероятность, что цель будет поражена хотя бы одним из стрелков?

Пусть A — попадание в цель первым стрелком, B — вторым стрелком, $A+B$ — поражение цели хотя бы одним стрелком, AB — поражение цели обоими стрелками. По формуле имеем

$$P(A+B) = 0{,}8 + 0{,}5 - P(AB).$$

В данном примере можно считать события A и B независимыми, поэтому

$$P(AB) = P(A) \times P(B) = 0{,}8 \times 0{,}5 = 0{,}4.$$

Тогда $P(A+B) = 0{,}9$.

Условная вероятность — вероятность появления события A при условии, что произошло событие B, обозначается $P_B(A)$. Вероятность произведения событий вычисляется с помощью условных вероятностей по формуле

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A).$$

Пример. В ящике имеются 7 белых и 5 черных шаров, отличающихся лишь цветом. Опыт состоит в том, что сначала вынимают (не глядя) один шар и, не опуская его обратно, вынимают еще один шар. Какова вероятность, что оба вынутых шара черные?

Появление первого черного шара (событие A) имеет, очевидно, вероятность $P(A) = 5/12$. Если первый шар оказался черным, то условная вероятность события B — появления второго черного шара (при условии, что первый шар был черным) — равна $P_A(B) = 4/11$, так как перед выниманием второго шара осталось 11 шаров, из них 4 черных. Вероятность вынуть два черных шара можно рассчитать по формуле

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{33} \approx 0{,}152.$$

События A и B называются *независимыми*, если условная вероятность $P_B(A)$ равна вероятности $P(A)$. Другими словами, для независимых событий появление одного не влияет на вероятность появления другого. Так, в предыдущем примере вероятность появления второго черного шара не зависела бы от цвета вынутого первого шара, если, вынув первый шар, мы положили бы его обратно в ящик. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

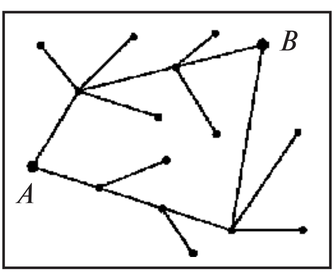
$$P(AB) = P(A) \times P(B).$$

На практике независимые события встречаются очень часто, поскольку причинная связь явлений во многих случаях отсутствует или несущественна.

Примеры

1. Производят n бросаний монеты. Результат каждого бросания s случайное событие, вероятность которого считаем не зависящей от результатов других бросаний, поэтому результаты этих n испытаний можно считать независимыми событиями.

2. Найти вероятность попадания из пункта A в пункт B, если на развилках дорога определяется случайным образом с равновероятным выбором пути.



Вероятность пойти в нужном направлении из пункта A по левой дороге равна $\frac{1}{2}$, на первой развилке — $\frac{1}{4}$, на второй — $\frac{1}{3}$. Таким образом, вероятность попадания из пункта A в пункт B по левой дороге равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$.

Аналогичным образом, вероятность пойти в нужном направлении из пункта A по правой дороге равна $\frac{1}{2}$, на первой развилке — $\frac{1}{2}$, на второй — $\frac{1}{2}$, на третьей — $\frac{1}{3}$. Вероятность попадания из пункта A в пункт B по правой дороге равна $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$.

В итоге, суммарная вероятность попадания из пункта A в пункт B равна $\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\frac{1}{12}$.

Упражнения

1. Какова вероятность того, что у матери родятся подряд 2, 3, 4 мальчика, если вероятность рождения мальчика считать равной 1/2?

2. В урне находятся 2 белых, 3 черных и 4 синих шара. Сделано подряд два извлечения, причем вынутый шар возвращался в урну. Определить вероятность появления: а) белого и черного шара; б) белого и синего; в) двух черных.

3. Найти вероятность тех же событий, если вынутый шар не возвращается в урну.

Ответ: **1**. 1/4; 1/8; 1/16. **2**. а) 2/27; б) 8/81; в) 1/9. **3**. а) 1/12; б) 1/9; в) 1/8.

Сумма вероятностей событий, составляющих полную группу, равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots\ +P(A_n)=1.$$

Пусть события A и $\overline{A}$ противоположные. Тогда $P(A)=p$; $P(\overline{A})=q$, где $p+q=1$; $q=1-p$; $p=1-q$.

Вероятность появления *хотя бы одного события* из событий A_1, A_2, ..., A_n, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий: $\overline{A}_1;\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n$, т.е.

$$P(A)=1-q_1q_2\ldots q_n.$$

Если события имеют одинаковую вероятность p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$$P(A)=1-q^n.$$

Пример. Один лотерейный билет выигрывает с вероятностью 0,0001. Какова вероятность того, что владелец одного билета ничего не выиграет?

Пусть событие A означает выигрыш. Тогда $\overline{A}$ означает, что билет не выигрывает. Из формулы $P(A)+P(\overline{A})=1$ следует, что $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}0001 = 0{,}9999.$

Упражнения

1. Три стрелка стреляют в цель независимо друг от друга. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,6, для второго — 0,7 и для третьего — 0,75. Найти вероятность по крайней мере одного попадания в цель, если каждый стрелок сделает по одному выстрелу.

2. В типографии 3 машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина.

Ответ: **1**. 0,97. **2**. 0,999.

12.5. Формулы Байеса и полной вероятности

Пусть события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий. Такие события называются гипотезами. Пусть событие A происходит вместе с гипотезами $H_1, H_2, ..., H_n$. Тогда для вероятности события A справедлива так называемая формула полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{H_i}(A).$$

В тесной связи с формулой полной вероятности находится формула Байеса (теорема гипотез):

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)}.$$

Примеры

1. На книжной полке стоят 5 учебников и 10 справочников, на второй полке — 3 учебника и 7 справочников. Со второй

полки на первую переложили какую-то одну книгу, а затем с первой полки взяли наугад одну книгу. Определите вероятность того, что взятая книга — учебник.

После того, как со второй полки на первую была переложена одна книга, на первой полке оказалось 16 книг. При этом возможны два варианта:

1) либо это 6 учебников и 10 справочников, если добавленная книга была учебником (одним из тех трех, что лежали на второй полке);

2) либо это 5 учебников и 11 справочников, если добавленная книга была справочником (одним из тех семи, что лежали на второй полке).

Обозначим события: H_1 — со второй полки взят учебник; H_2 — со второй полки взят справочник; A — после перекладывания книги с первой полки взят учебник. Очевидно, события H_1 и H_2 предшествуют событию A. Они образуют полную группу событий: являются равновозможными, попарно несовместимыми.

Вычисляем:

$$P(H_1) = \frac{3}{10},\ P(H_2) = \frac{7}{10},\ P_{H_1}(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8},\ P_{H_2}(A) = \frac{5}{16}.$$

Затем пользуясь формулой полной вероятности, находим:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) = \frac{3}{10}\cdot\frac{3}{8} + \frac{7}{10}\cdot\frac{5}{16} = \frac{53}{160}.$$

2. На предприятии изготовляются изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится 20 % всего объема изделий, на второй — 30 %, на третьей — 50 %. Каждая из линий характеризуется соответственно следующими показателями годности изделии: 95, 98 и 97 %. Требуется определить вероятность того, что наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется бракованным, а также вероятности того, что это бракованное изделие сделано на первой, второй либо третьей линии.

Обозначим через H_1, H_2, H_3 события, состоящие в том, что наугад взятое изделие произведено на первой, второй и третьей линиях. Согласно условиям задачи, $P(H_1) = 0{,}2$; $P(H_2) = 0{,}3$; $P(H_3) = 0{,}5$, и эти события образуют полную группу событий, поскольку они попарно несовместны и $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$. Обозначим через A событие, состоящее в том, что наугад взятое изделие, оказалось бракованным. Согласно условиям задачи,

$P(H_1) = 0{,}05$; $P(H_2) = 0{,}02$; $P(H_3) = 0{,}03$. Используя формулу полной вероятности, находим:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) =$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}5 \cdot 0{,}03 = 0{,}031,$$

т.е. вероятность того, что наугад взятое изделие окажется бракованным, равна 3,1 %.

Априорные вероятности того, что наугад взятое изделие изготовлено соответственно на первой, второй и третьей линиях, равны 0,2, 0,3 и 0,5.

Затем был выполнен эксперимент, в результате которого наугад взятое изделие оказалось бракованным. Определим теперь апостериорные вероятности того, что это изделие изготовлено на первой, второй либо третьей линии. По формуле Байеса имеем

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}05}{0{,}031} = \frac{10}{31},$$

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}02}{0{,}031} = \frac{6}{31},$$

$$P_A(H_3) = \frac{P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}03}{0{,}031} = \frac{15}{31}.$$

Таким образом, вероятности того, что взятое наугад и оказавшееся бракованным изделие изготовлено на первой, второй или третьей линии равны соответственно 0,322; 0,194; 0,484.

12.6. Схема Бернулли

Пусть проводятся n независимых испытаний: любое возможное событие в любом опыте не зависит от наступления любого события в любом другом опыте. Последовательность n независимых опытов называется *схемой Бернулли*, если вероятность некоторого события A одинакова во всех опытах и равна p. Наступление события A рассматривается как успех.

Пример. Монета бросается 100 раз, A — выпадение «герба». Для всех опытов $P(A)=p=\frac{1}{2}$.

В условиях схемы Бернулли вероятность того, что событие A наступит ровно k раз ($k=\{0, 1, 2, ..., n\}$, равна

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}.$$

Здесь C_n^k — число комбинаций из n элементов по k; $q=1-p$.

Формула Бернулли применяется, когда число испытаний n невелико ($npq<20$). Обозначим $P_n(m_1,m_2)$ вероятность того, что событие A в рамках схемы Бернулли наступило не менее m_1 раз и не более m_2 раз в n независимых испытаниях. Тогда справедливо следующее равенство:

$$P_n(m_1,m_2)=\sum_{k=m_1}^{k=m_2} C_n^k p^k q^{n-k}=P_n(m_1)+P_n(m_1+1)+... +P_n(m_2).$$

Примеры

1. Какова вероятность того, что при $n=10$ подбрасываниях монеты изображение герба выпадает ровно 3 раза?

Проводится серия из 10 независимых испытаний (подбрасываний). Событие A — выпадения изображения «герба». Вероятность события A одинакова во всех испытаниях и равна $P(A)=p=\frac{1}{2}$. Итак, $n=10$, $k=3$, $p=\frac{1}{2}$, $q=1-p=\frac{1}{2}$. Найти $P_{10}(3)$. По формуле Бернулли имеем:

$$P_{10}(3)=C_{10}^3 p^3 q^7=\frac{10!}{7!\,3!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 2^{10}}=\frac{120}{1024}=\frac{15}{128}.$$

2. Применяемый метод лечения приводит к выздоровлению в 80 % случаев. Какова вероятность того, что: а) из 5 больных выздоровят 4; б) из 5 больных выздоровят не менее 4?

В первом случае (см. п. а) $p=0{,}8$, $q=1-p=0{,}2$, $n=5$, $k=4$. Поэтому по формуле Бернулли определяем:

$$P_5(4)=C_5^4\, p^4 q^1=\frac{5!}{4!(5-4)!}\,(0{,}8)^4\,(0{,}2)^1=\frac{5\cdot 8^4\cdot 2}{10^5}=0{,}4096\approx 0{,}41.$$

Во втором случае (см. п. б) $P_5(4,5)=P_5(4)+P_5(5)=0{,}4096+$ $+(0{,}8)^5=0{,}7373\approx 0{,}74.$

3. В урне 10 белых и 15 черных шаров. Вынули подряд 4 шара, причем каждый вынутый шар потом возвращают в урну перед извлечением следующего, и шары в урне перемешивают. Какова вероятность того, что извлечено не более двух белых шаров?

Так как вынутые шары возвращают в урну, то вероятность извлечь белый шар в каждом испытании одинакова и равна $p=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}\left(q=1-p=\frac{3}{5}\right)$. Тогда

$$P_4(0,2)=P_4(0)+P_4(1)+P_4(2)=C_4^0p^0q^4+C_4^1p^1q^3+C_4^2p^2q^2=$$

$$=\frac{81}{625}+\frac{216}{625}+\frac{216}{625}=\frac{513}{625}.$$

Упражнения

А. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ПОДСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Игральная кость подбрасывают 3 раза. Какова вероятность того, что: а) шестерка не появится ни разу; б) шестерка появится хотя бы один раз?

Ответ: а) 0,579; б) 0,421.

2. Из 40 экзаменационных вопросов студент выучил 30. Какова вероятность того, что он ответит: а) на 3 заданных вопроса; б) на 2 из 3 заданных вопросов?

Ответ: а) 0,411; б) 0,440.

3. Из урны с 5 белыми и 7 черными шарами наугад берут 4 шара. Найти вероятности событий: а) взято 2 белых шара; б) взято белых шаров больше, чем черных.

Ответ: а) 0,424; б) 0,162.

4. Из колоды в 36 карт наугад берут 4 карты. Найти вероятности следующих событий: а) все карты имеют одну масть; б) все карты красные; в) все карты — тузы.

Ответ: а) 0,00856; б) 0,0519; в) 0,0000170.

5. В коробке находятся 6 новых и 2 израсходованные батарейки. Какова вероятность того, что две вынутые из коробки наудачу батарейки окажутся новыми?

Ответ: 15/28.

Б. ПРАВИЛА СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Из урны с 8 белыми и 4 черными шарами последовательно вынимают 3 шара. Какова вероятность вынуть 3 белых шара?

Ответ: 0,255.

2. В первой урне 4 белых и 6 синих шаров, во второй — 5 белых и 3 синих. Наугад из каждой урны берут по 2 шара. Найти вероятности событий: а) все шары белые; б) все шары одного цвета; в) белых — 2 шара.

Ответ: а) 0,0476; б) 0,0833; в) 0,419.

3. Двое поочередно подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Какова вероятность выигрыша для каждого из игроков?

Ответ: 2/3 — для начинающего; 1/3 — для второго.

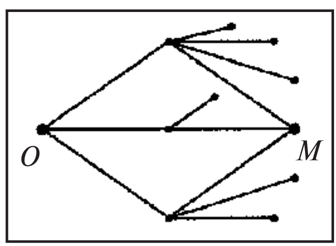
4. Вероятность для данного стрелка попасть в данную цель равна 0,9. Какова вероятность того, что из двух выстрелов у него будут два попадания, два непопадания, сначала попадание, потом непопадание?

Ответ: 81/100; 1/100; 9/100.

5. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,75. Сколько независимых выстрелов необходимо произвести, чтобы вероятность поражения мишени была больше: а) 0,95; б) 0,99; в) 0,999?

Ответ: а) 3; б) 4; в) 5.

6. Турист выходит из пункта *O* и на разветвлении дорог с равной вероятностью выбирает один из возможных путей. Какова вероятность того, что он попадет в пункт *M*?



Ответ: $\frac{13}{36}$.

В. ФОРМУЛЫ БАЙЕСА И ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

1. В первой урне 15 синих и 5 красных шаров, во второй — 8 синих и 12 красных. Из наугад выбранной урны наугад извлекают шар. Вынутый шар оказался синим. Найти вероятность того, что он оказался из первой урны.

2. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе, как 3 : 2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

3. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 — хорошо, 2 — посредственно, 1 — плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент знает все 20 вопросов, хорошо подготовленный — 16 вопросов, посредственно подготовленный — 10 вопросов и двоечник — 5 вопросов. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен: а) отлично; б) плохо.

4. Первый стрелок попадает в десятку с вероятностью 0,9, второй — с вероятностью 0,8. С первого выстрела в десятку попал только один. Найти вероятность того, что промахнулся первый из них.

5. С первого автомата на сборку поступает 20 %, со второго — 30 %, с третьего — 50 % деталей. Первый автомат дает в среднем 0,2% брака, второй — 0,3 %, третий — 0,1 %. Найти вероятность того, что: а) поступившая на сборку деталь бракованная; б) бракованная деталь изготовлена на первом автомате.

6. Из 30 билетов студент выучил половину: 6 легких билетов, 6 — средней сложности и 3 — сложных. Всего легких билетов — 8, средних — 10 и сложных — 12. Какова вероятность того, что на экзамене он получит положительную оценку?

Ответ: **1**. 15/23. **2**. 3/7. **3**. а) 114/197; б) 1/591. **4**. 1/3. **5**. а) 0,0018; б) 0,222. **6**. 0,5.

Г. СХЕМА НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ

1. В урне 3 белых и 2 черных шара. Из урны 4 раза наугад вынимают по 2 шара и возвращают обратно. Найти вероятность того, что ровно 3 раза вынули шары разного цвета.

2. Монета брошена 10 раз. Найти вероятность того, что изображение герба выпадет: а) 5 раз; б) от 4 до 6 раз; в) хотя бы один раз.

3. Контрольная работа состоит из 5 вопросов. На каждый вопрос предлагается 4 варианта ответа, из которых только один правильный. Учащийся не готов к контрольной и поэтому выбирает ответы наугад. Какова вероятность того, что он правильно ответит на: а) все вопросы; б) не менее 4 вопросов; в) не менее 2 вопросов?

4. Что более вероятно: выиграть у равносильного противника: а) 2 партии из 4 или б) 4 из 8 (ничьи не в счет)?

5. Вероятность выигрыша по одному билета лотереи равна 1/7. Какова вероятность того, что лицо, имеющее 6 билетов, выигрывает по двум билетам?

Ответ: **1**. 0,3456. **2**. а) 0,25; б) 0,66; в) 0,999. **3**. а) 0,001; б) 0,006; в) 0,37. **4**. а) 0,375; б) 0,273. **5**. 0,1652.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение суммы, произведения двух событий. Какое событие называют противоположным данному? Проиллюстрируйте определения диаграммами Эйлера—Венна.

2. Приведите классическое и статистическое определения вероятности.

3. В чем состоит особенность геометрического подхода к определению вероятности?

4. Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шаров, вынимают наугад два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

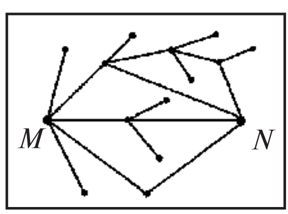
5. Сформулируйте следствия из теоремы сложения вероятностей.

6. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 2, либо 5, либо тому и другому одновременно.

7. Дайте определение зависимых и независимых событий. Приведите примеры.

8. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров. Во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара белые?

9. Найти вероятность попадания из M в N, если на развилках с равной вероятностью выбирается один из путей.



Знание некоторых принципов легко возмещает незнание некоторых фактов.

Гельвеций

13. Случайные величины

Случайная величина – переменная величина, конкретное значение которой зависит от случая. Например, температура воздуха в 12 ч. дня 1 июля в Новосибирске; номер грани, выпадающий при бросании кости; скорость автомобиля в данный момент времени и др.

13.1. Основные понятия

Схематично основные понятия представлены на рис. 27.

Для характеристики случайной величины необходимо знать множество возможных значений этой величины и вероятности, с которыми она может их принимать. Эти данные образуют закон распределения случайной величины. Например, распределение числа очков при бросании игральной кости описывается равными вероятностями 1/6 для каждого значения от 1 до 6.

Случайная величина	
Дискретная	Непрерывная

Математическое ожидание	Дисперсия

Основные законы распределения	
Дискретные величины	*Непрерывные величины*
Равномерное распределение	Равномерное (прямоугольное) распределение
Биноминальное распределение	Экспоненциальное (показательное) распределение
Распределение Пуассона	Нормальное распределение

Рис. 27

Множество возможных значений *дискретной* случайной величины конечно (или счетно). Встречаются также *непрерывные* случайные величины, возможные значения которых заполняют всю числовую ось (или некоторые интервалы).

Непрерывную случайную величину A следует задавать не указанием вероятностей ее отдельных значений, а непрерывной (или кусочнонепрерывной) функцией, называемой *плотностью распределения* вероятностей случайной величины A.

Часто встречается *нормальное распределение*, или *распределение Гаусса*. На рис. 28 показаны два варианта плотности нормального распределения.

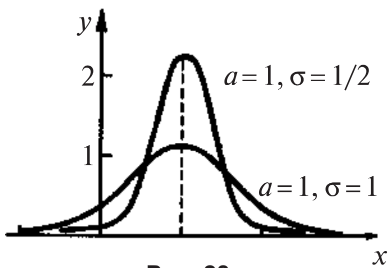


Рис. 28

Дискретной случайной называют величину X, которая принимает отдельные значения x_i с вероятностями p_i. Ее законом распределения называют соответствие между возможными значениями x_i и их вероятностями p_i. Следует заметить, что $\Sigma p_i = 1$.

Пример. Подбрасываются две симметричные монеты, подсчитывается число изображений «герба» на обеих верхних сторонах монет. Составить закон распределения дискретной случайной величины X — число выпадений изображений «герба» на обеих монетах.

Возможные исходы: «ГГ»; «ГО»; «ОГ»; «ОО», т.е. изображение герба может выпасть один раз, два или ни разу. Следовательно, $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$. Найдем вероятности этих значений:

$$P_1(X = 0) = \frac{1}{4} = 0{,}25;\ P_2(X = 1) = \frac{2}{4} = 0{,}5;\ P_3(X = 2) = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Проверка: $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}25 = 1$. Составим закон в виде таблицы:

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

Упражнение. В денежной лотерее выпущено 1000 билетов. Разыгрывается один выигрыш — 10 руб., четыре — по 5 руб., пять — по 4 руб. и десять выигрышей по 1 руб. Составить ряд распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета и построить многоугольник распределения.

Ответ:

X	10	5	4	1	0
P	0,001	0,004	0,005	0,01	0,98

Закон распределения дискретной случайной величины X — число появлений k событий A при n испытаниях, определяемый по формуле Бернулли, называется *биноминальным*:

$$P_k = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Биноминальный закон распределения дискретной случайной величины можно представить в виде табл. 12.

Таблица 12

X	0	1	...	k	...	n
P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

Пример. Проверкой качества установлено, что из каждых 100 деталей не имеют дефектов 75 в среднем. Составить биноминальное распределение вероятностей числа пригодных деталей из взятых наудачу 6 деталей.

Из условия задачи следует, что $p=0{,}75$, $q=0{,}25$, $n=6$. В соответствии с формулой Бернулли находим: $P_6(0) = 1\cdot(0{,}25)^6 \approx 0{,}0002$; $P_6(1) = 6\cdot(0{,}75)^1\cdot(0{,}25)^5 \approx 0{,}004$; $P_6(2) = 15\cdot(0{,}75)^2\cdot(0{,}25)^4 \approx 0{,}033$; $P_6(3) = 20\cdot(0{,}75)^3\cdot(0{,}25)^3 \approx 0{,}132$; $P_6(4) = 15\cdot(0{,}75)^4\cdot(0{,}25)^2 \approx 0{,}297$; $P_6(5) = 6\cdot(0{,}75)^5\cdot(0{,}25) \approx 0{,}356$; $P_6(6) = 1\cdot(0{,}75)^6 \approx 0{,}178$. Закон распределения данной случайной величины X — числа стандартных деталей из 6, взятых наугад, — можно задать таблицей.

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,000	0,004	0,033	0,132	0,297	0,356	0,178

Убедимся в выполнении условия полноты:

$$0{,}004 + 0{,}033 + 0{,}132 + 0{,}297 + 0{,}356 + 0{,}178 = 1,$$

т.е. закон выполнен.

Распределением Пуассона называется распределение вероятностей дискретной случайной величины, определяемое формулой

$$P_n(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a},$$

где k — число появлений событий в независимых испытаниях. Постоянную $a = np$ называют *параметром распределения Пуассона* (среднее появление событий в n испытаниях).

Закон распределения Пуассона можно записать в виде табл. 13.

Таблица 13

X	0	1	2	...	k	...
P	e^{-a}	ae^{-a}	$\frac{a^2 e^{-a}}{2!}$	...	$\frac{a^k e^{-a}}{k!}$	...

Для непрерывной случайной величины нельзя построить ряд распределения, так как невозможно перечислить все ее возможные значения. Непрерывная случайная величина может быть задана либо *функцией распределения*, либо *плотностью вероятности*.

13.2. Функция распределения

Определение. *Функцией распределения* случайной величины X называется функция действительной переменной X, определяемая равенством:

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

где $P(X<x)$ — вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x. Геометрически это означает: $F(x)$ — вероятность того, что случайная величина X примет значение, которое изображается точкой на числовой прямой, расположенной слева от точки x.

Функция $F(x)$ случайной величины X имеет следующие свойства:

1. Все ее значения принадлежат отрезку [0;1], т.е. $0 \le F(x) \le 1.$ Это следует из определения и свойств вероятности.

2. Функция является неубывающей, т.е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

3. В точке x_0 она слева непрерывна, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = $ $= F(x_0);\ F(x_0 - 0) = F(x_0).$

4. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$ и $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

5. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат бесконечному интервалу $(-\infty;+\infty)$, то $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0;\ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

Зная функцию распределения, можно определить вероятность того, что случайная величина X попадет в интервал $(x_1; x_2)$ с помощью формулы

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1),$$

т.е. вероятность попадания значения случайной величины в заданный интервал равняется разности значений функции распределения этой случайной величины, вычисленных в конце и начале интервала.

Для дискретной случайной величины X, которая может принимать значения x_1, $x_2 \ldots x_n$ с соответствующими вероятностями функция распределения $F(x) = \sum\limits_{x_k < x} P(X = x_k)$, где неравенство $x_k < x$ означает, что суммируются вероятности тех значений, которые меньше x. В этом случае $F(x)$ представляет собой разрывную функцию, остающуюся постоянной между отдельными значениями случайной величины и меняющуюся скачком при переходе через каждое из этих значений.

13.3. Плотность распределения

Определение. *Плотностью распределения* (дифференциальной функцией распределения) вероятностей случайной величины X в точке x называется предел (если он существует) отношения вероятности попадания значений этой величины в интервал $(x; x+\Delta x)$ к длине отрезка $[x; x+\Delta x]$, когда последняя стремится к нулю:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Интеграл от функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty; x)$ равен значению функции распределения $F(x)$ для верхнего предела интегрирования, т.е.

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x).$$

Поэтому $F(x)$ называют *интегральной функцией* распределения вероятностей.

Вероятность попадания значений случайной величины X в интервал $(x_1; x_2)$ равна определенному интегралу от плотности распределения $f(x)$ по отрезку $(x_1;x_2)$, т.е.

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1. Плотность распределения $f(x)$ — неотрицательная функция, т. е. $f(x) \geq 0$. Это следует из определения и свойств вероятности.

2. На области дифференцируемости функции распределения $F(x)$ ее производная равна плотности распределения: $f(x) = F'(x)$, т.е. производная интегральной функции равна дифференциальной функции.

3. Интеграл по бесконечному промежутку $(-\infty;\infty)$ от плотности распределения $f(x)$ равен единице: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Если все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[x_1; x_2]$, то $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx = 1$, так как вне этого отрезка $f(x) = 0$.

Примеры

1. Закон распределения дискретной случайной величины задан следующей таблицей

X	0	1	2	3
P	0,2	0,4	0,3	0,1

Найти функцию распределения этой случайной величины.

Для построения функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X воспользуемся ее свойствами.

При $x \le 0$ $\quad F(x) = \sum\limits_{x_k} P(X = x_k) = 0;$

$0 < x \le 1 \quad F(x) = \sum\limits_{x_k < 1} P(X = x_k) = P(X = 0) = 0{,}2;$

$1 < x \le 2 \quad F(x) = \sum\limits_{x_k < 2} P(X = x_k) = P(X = 0) +$

$+ P(X = 1) = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6;$

$2 < x \le 3 \quad F(x) = \sum\limits_{x_k < 3} P(X = x_k) = P(X = 0) + P(X = 1) +$

$+ P(X = 2) = 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}9;$

$x > 3 \quad F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) +$

$+ P(X = 3) = 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}1 = 1;$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 0;\\ 0,2, & \text{если} \quad 0<x\le 1;\\ 0,6, & \text{если} \quad 1<x\le 2;\\ 0,9, & \text{если} \quad 2<x\le 3;\\ 1, & \text{если} \quad x>3.\end{cases}$$

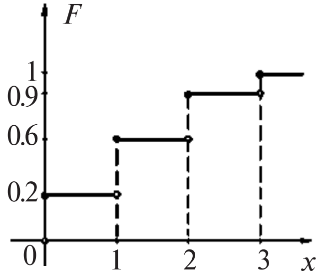


График функции $F(x)$ изображен на рисунке.

2. Плотность вероятности случайной величины X задана функцией

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0;\\ \dfrac{x}{2}, & \text{если} \quad 0\le x<2;\\ 0, & \text{если} \quad x\ge 2.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение из интервала (1; 2).

Определим искомую вероятность:

$$P(1<X<2)=\int_1^2 \frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{4}\bigg|_1^2=\frac{2^2}{4}-\frac{1^2}{4}=\frac{3}{4}.$$

3. Найти функцию распределения случайной величины X, плотность вероятности которой определена функцией

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 0;\\ x, & \text{если} \quad 0<x\le 1;\\ 2-x, & \text{если} \quad 1<x\le 2;\\ 0, & \text{если} \quad x>2.\end{cases}$$

Определим функцию распределения:

при $x\le 0$ $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx=0;$

при $0<x\le 1$ $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{x} f(x)dx=$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_0^x xdx=0+\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2};$$

при $1 < x \le 2$ $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{1} xdx + \int\limits_{1}^{x} (2-x)dx =$

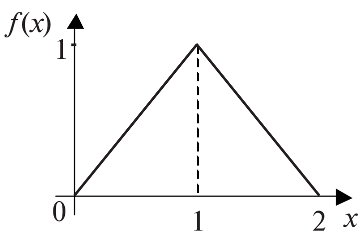
$$= 0 + \frac{1^2}{2} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^x = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1;$$

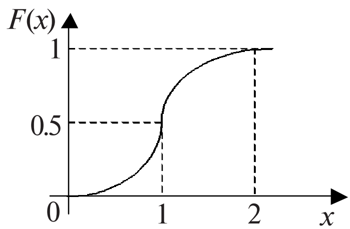
при $x > 2$ $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{2} + \left(2 \cdot 2 - \frac{2^2}{2}\right) - \left(2 \cdot 1 - \frac{1^2}{2}\right) = 1.$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{2}, & \text{если} \quad 0 < x \le 1; \\ -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 1, & \text{если} \ 1 < x \le 2; \\ 1, & \text{если} \quad x > 2. \end{cases}$$

Графики полученных функций $f(x)$ и $F(x)$ представлены на рисунках.





Упражнение. Дана функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le -\dfrac{\pi}{2}; \\ \cos x, & \text{если} \ -\dfrac{\pi}{2} < x \le 0; \\ 1, & \text{если} \quad x > 0. \end{cases}$$

Показать, что эта функция является функцией распределения некоторой случайной величины X. Найти вероятность того, что эта случайная величина принимает значения из интервала $\left(-\frac{\pi}{3}; 0\right)$.

Ответ: 1/2.

13.4. Числовые характеристики случайной величины

Важные характеристики случайной величины — математическое ожидание и дисперсия.

Математическое ожидание $M(X)$ определяется как среднее взвешенное по формуле

$$M(X) = \Sigma x_i p_i .$$

Термин «математическое ожидание» связан с представлением о среднем или наиболее ожидаемом выигрыше в теории азартных игр.

Пример. Пусть в некоторой лотерее на каждый билет вероятность выиграть 100 руб. равна 3 %, 1000 руб. — 0,5 %, 10 000 руб. — 0,01 %, других выигрышей нет. Каков средний выигрыш в лотерее (на один билет)?

Средний выигрыш подсчитывается по формуле математического ожидания:

$$0{,}03 \times 100 + 0{,}005 \times 1000 + 0{,}0001 \times 10\,000 = 9 \text{ руб.}$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, все значения которой принадлежат $[x_1; x_2]$, а $f(x)$ — ее плотность вероятностей, определяется формулой

$$M(X) = \int_{x_1}^{x_2} x f(x) dx.$$

Математическое ожидание случайной величины есть величина постоянная.

Пример. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана функцией:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0; \\ \dfrac{3}{8} x^2, & \text{если} \ \ 0 < x \le 2; \\ 0, & \text{если} \quad x > 2. \end{cases}$$

Подставив значение $f(x)$ в приведенную выше формулу, получим математическое ожидание случайной величины X.

$$M(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^4}{4} \bigg|_0^2 = 1{,}5.$$

Упражнение. Подбрасываются два игральных кубика. Дискретная случайная величина X — сумма выпавших очков на обоих кубиках. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

Ответ: 7.

Дисперсия[1] $D(X)$ случайной величины X характеризует разброс возможных ее значений относительно математического ожидания и определяется по формуле

$$D(X) = M\,[X - M(X)]^2.$$

Для детерминированной величины, принимающей только одно значение x_0, математическое ожидание равно x_0, а дисперсия равна нулю.

Из определения и свойств математического ожидания следует, что дисперсия любой случайной величины неотрицательна, т.е. $D(X) \geq 0$.

Пример. Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей.

X	–2	–1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Вычислить дисперсию случайной величины X.

Сначала найдем математическое ожидание: $M(X) = -2 \cdot 0,1 - -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,1 = 0$. Запишем закон распределения случайной величины $(X - M(X))^2$ в виде таблицы.

$(X - M(X))^2$	$(-2-0)^2$	$(-1-0)^2$	$(0-0)^2$	$(1-0)^2$	$(2-0)^2$
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Определим дисперсию: $D(X) = 4 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,4 + + 1 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 = 1,2$.

Упражнение. Симметричная монета подбрасывается 4 раза. Случайная величина X — число выпадений изображения

[1] Термин «дисперсия» происходит от латинского *dispengo* – рассыпать, рассеивать, разбрасывать.

герба при этих подбрасываниях. Найти числовые характеристики случайной величины X.

Ответ: $M(X)=2$; $D(X)=1$.

Определение. *Средним квадратическим отклонением* случайной величины X называется квадратный корень из ее дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Среднее квадратическое, как и дисперсия, служит *мерой рассеивания* случайной величины относительно ее математического ожидания.

13.5. Основные законы распределения

Выше были рассмотрены два закона случайных величин: биномиальный и Пуассона.

Числовые характеристики для биномиального распределения:

$$M(X)=np;\ D(X)=npq;\ \sigma(X)=\sqrt{npq}.$$

Числовые характеристики для пуассоновского распределения:

$$M(X)=np;\ D(X)=np;\ \sigma(X)=\sqrt{np}.$$

Определение. *Геометрическим распределением* называется распределение дискретной случайной величины X, определяемое формулой

$$P(X=m)=(1-p)^{m-1}p;\ 0<p<1;\ m=1,2,3,...$$

Это название связано с тем, что вероятности образуют бесконечную убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q=1-p$.

Числовые характеристики для геометрического распределения имеют вид:

$$M(X)=\frac{1}{p};\ D(X)=\frac{1-p}{p^2}.$$

Определение: Распределение вероятностей случайной величины X называется *равномерным на* *отрезке* $[\alpha;\beta]$, если плотность вероятностей этой величины постоянна на данном отрезке и равна нулю вне этого отрезка:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<\alpha;\\ c, & \text{если } \alpha\le x\le\beta;\\ 0, & \text{если } x>\beta.\end{cases}\quad A=\frac{1}{\beta-\alpha};$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<\alpha;\\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \text{если } \alpha\le x\le\beta;\\ 1, & \text{если } x>\beta.\end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$, в случае равномерного распределения изображены на рис. 29 и 30.

С равномерным распределением встречаются всякий раз, когда по условиям опыта величина X принимает значения в конечном промежутке $[\alpha;\beta]$. Все значения из этого промежутка возможны в *одинаковой степени*, причем ни одно из них не имеет преимущества перед другими.

Числовые характеристики для равномерного распределения имеют вид:

$$M(X)=\frac{\beta+\alpha}{2};\ D(X)=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12};\ \sigma(X)=\frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{3}}.$$

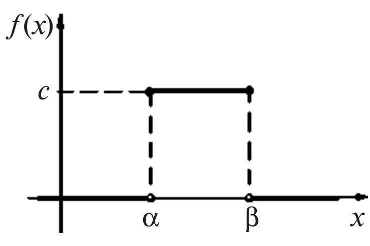


Рис. 29

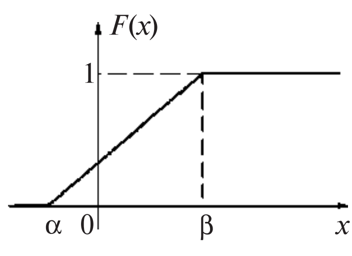


Рис. 30

Определение. *Показательным распределением* называется распределение с плотностью, определяемое функцией

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0;\\ \alpha e^{-\alpha x}, & \text{если } x\ge 0\ (\alpha>0).\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0;\\ 1-e^{-\alpha x}, & \text{если } x\ge 0.\end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$, в случае показательного распределения изображены на рис. 31 и 32.

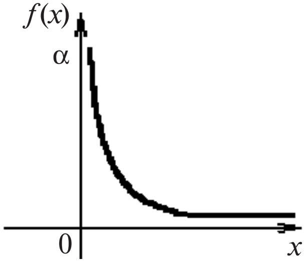


Рис. 31

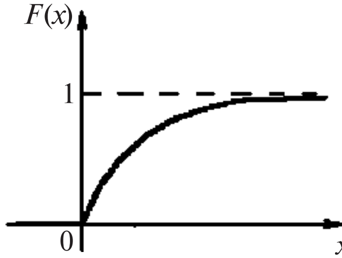


Рис. 32

Числовые характеристики для показательного распределения имеют вид:

$$M(X)=\frac{1}{\alpha};\ D(X)=\frac{1}{\alpha^2};\ \sigma(X)=\frac{1}{\alpha}.$$

Определение. *Нормальным распределением*, или *распределением Гаусса*, называется распределение с плотностью вероятностей

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}};\ \sigma>0,$$

где a — его математическое ожидание; σ — среднее квадратическое отклонение.

Нормальное распределение получается из биномиального распределения и распределения Пуассона при некоторых ограничениях на n и p.

О случайной величине X, плотность распределения которой определяется данной функцией, говорят, что она распределена нормально с параметрами a; σ, и коротко называют ее нормальной кривой (кривой Гаусса). Вершина кривой соответствует точке с абсциссой $X = a = M(X)$, параметр σ (среднее квадратическое отклонение случайной величины X)

определяет абсциссы точек перегиба кривой вероятностей. Кривая при $a = 0$; $\sigma = 1$ называется *нормированной кривой*.

Нормальное распределение имеет следующие особенности:

- наиболее вероятны значения, близкие к ожидаемому среднему значению a;
- отклонения от среднего значения a в обе стороны равновероятны;
- большие отклонения от a маловероятны.

Наиболее общий случай нормального распределения имеет место при систематических отклонениях в стрельбе, в измерениях и других наблюдениях.

Закон нормального распределения имеет в теории вероятностей исключительно важное значение. В сферу его применения включаются не только отдельные случайные величины, но и суммы любого числа независимых случайных величин, распределенных по нормальному закону (соответствующая теорема сложения для нормального распределения доказывается в подробных курсах теории вероятностей).

Обработка результатов наблюдения в предположении, что они распределены по нормальному закону, легко доводится до конца с помощью простых правил операций с нормально распределенными величинами. Более того, оказывается, что закон распределения суммы независимых величин при довольно широких предположениях о законах распределения отдельных слагаемых стремится к нормальному закону, если число слагаемых неограниченно возрастает.

Существует теорема, сущность которой заключается в том, что при некоторых общих условиях сумма n независимых случайных величин, заданных произвольными распределениями, имеет распределение, которое по мере возрастания числа n стремится к нормальному.

Вероятность попадания значений нормальной случайной величины X в интервал (α; β) определяется формулой

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$ Эта функция табулирована.

Пример. При изготовлении некоторого изделия его масса X подвержена случайным колебаниям. Стандартная масса изделия равна 30 г, ее среднее квадратическое отклонение равно 0,7, а случайная величина X распределена по нормальному закону. Найти вероятность того, что масса наугад выбранного изделия находится в пределах от 28 до 31 г.

Воспользуемся формулой $P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$ В данном случае $a = 30,\ \sigma = 0{,}7;\ \alpha = 28;\ \beta = 31,$ т.е. имеем:

$$P(28 < x < 31) = \Phi\left(\frac{31 - 30}{0{,}7}\right) - \Phi\left(\frac{28 - 30}{0{,}7}\right) =$$

$$= \Phi(1{,}43) - \Phi(-2{,}86) = \Phi(1{,}43) + \Phi(2{,}86) = 0{,}424 + 0{,}498 = 0{,}922.$$

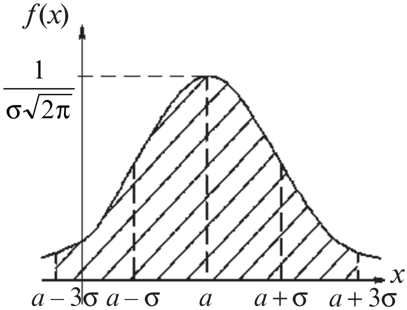
С помощью функции Лапласа можно определить и вероятность отклонения нормальной случайной величины, или вероятность неравенства $|X - a| < \delta$, где a — математическое отклонение нормально распределенной величины X:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \text{ или } P(|X - a| < \sigma t) = 2\Phi(t),$$

где $\frac{\delta}{\sigma} = t;\ \delta = \sigma t.$

Если $t = 3$, т.е. $\delta = 3\sigma$, то $P(|X - a| < 3\sigma) = 0{,}9973.$ Это равенство означает, что событие имеет вероятность, близкую к единице, т.е. является почти достоверным.

Данная формула выражает *правило трех сигм*: если случайная величина распределена по нормальному закону, то модуль ее отклонения от математи-



ческого ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения. Графическая интерпретация этого правила изображена на рисунке.

Понятие случайного (стохастического) процесса является расширением понятия случайной величины. Можно сказать, что случайный процесс — это семейство случайных величин, эволюционирующих во времени.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение случайной величины. Когда случайную величину называют дискретной?

2. Запишите свойства функции распределения.

3. Каковы основные способы задания закона распределения дискретной случайной величины?

4. Дайте определения математического ожидания и дисперсии случайной величины.

5. Каков смысл параметров a и σ функции плотности нормального распределения? Как изменяется график функции $f(x)$ при изменении этих параметров?

Числа не управляют миром,
но они показывают, как управляется мир.
И. Гёте

14. Основы математической статистики

Математическая статистика занимается разработкой методов сбора, регистрации и обработки результатов наблюдений (измерений) с целью познания закономерностей случайных массовых явлений. Например, методы статистики в литературоведении характеризуют стиль разных авторов не только качественно, но и количественно. Спорные вопросы об авторстве (а это уже юриспруденция!) при этом можно решать с помощью чисел. Так решился вопрос об авторстве (или соавторстве?) «Илиады»: подсчеты на ЭВМ всех ритмических особенностей каждой главы произведения показали, что автором поэмы мог быть только один человек, поскольку все главы имеют общее ритмическое единство.

14.1. Основные понятия математической статистики

Термин «статистика» в настоящее время употребляется в разных значениях, однако зачастую под ним понимают науку, изучающую массовые явления для выявления закономерностей и некоторых обобщенных показателей, кратко характеризующих полученные данные. Как правило, статистика имеет дело с числовыми значениями, зависящими от множества различных причин, одни из которых — существенные, а другие — случайные. Основная задача статистики состоит в абстрагировании от случайного и выявлении типичного, характерного и закономерного.

Сам термин «статистика» произошел от латинского слова status, что означает «политическое состояние» и первоначально статистикой называли изучение государственных дел, а видных политических деятелей, хорошо осведомленных и потому способных делать обоснованные политические выводы, — statists. Позднее под словом «статистика» стали подразумевать числовые данные, на основе которых государственные деятели делали выводы, а еще позже стали использовать для числовых данных вообще и постепенно пришли к современному значению.

Математическая статистика — это раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов. *Статистическими данными* называются сведения о числе объектов в какой-либо совокупности, обладающей общими признаками. *Предметом* математической статистики является формальная математическая сторона статистических исследований, безразличная к специфике природы изучаемых объектов. Например, такое социальное явление, как преступность, изучают и юристы, и психологи, и социологи, и медики, причем каждая наука вырабатывает специфические методы исследования.

Связь математической статистики с теорией вероятностей. В предыдущих разделах мы имели дело с вероятностями случайных событий, случайными величинами, их математическими ожиданиями, дисперсиями, а также законами, функциями и плотностями распределений. При этом считалось, что все они известны. В практических задачах положение иное: основные из перечисленных характеристик мы должны получить из опытов, наблюдений или отчетности. К тому же надо иметь в виду, что всякая статистика связана с ошибками наблюдений и измерений, поэтому характеристики являются приближенными. Нужно уметь оценивать ошибки приближений и надежность полученных результатов.

Задачи математической статистики в известной мере являются обратными к задачам теории вероятностей (табл. 14).

Таблица 14

Теория вероятностей	Математическая статистика
1. Модель, описывающая изучаемое явление или объект, известна априори (до опыта). Есть сведения обо всей генеральной совокупности, описывающей исследуемое явление. 2. Используемый математический аппарат не зависит от предметной области. 3. Выводы о поведении исследуемого объекта или явления делаются по всей генеральной совокупности.	1. Модель, описывающая исследуемое явление, априори не известна. 2. Для определения модели можно проводить пробные испытания (сформировать выборку из генеральной совокупности). 3. Иногда модель может быть задана априори с точностью до неизвестных параметров. 4. Значения неизвестных параметров модели могут быть приближенно получены по выборке из генеральной совокупности. 5. Выводы о поведении объекта или явления делаются по выборке ограниченного объема и распространяются на всю генеральную совокупность.

Итак, общая задача математической статистики состоит в том, чтобы по результатам наблюдений, измерений, отчетности и т.д. составить представление о той вероятностной ситуации, с которой мы столкнулись (это может быть задача о вычислении вероятности случайного события или функции распределения случайной величины, их математического ожидания, разброса значений и др.). Причем надо не только сделать выводы из поставленных экспериментов, измерений, собранного материала, но и организовать их проведение и анализ наиболее рациональным образом.

Выборочный метод. Пусть требуется изучить множество однородных объектов (статистическую совокупность) относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, если анализируется возрастной состав работающих на крупном предприятии, то качественным признаком может быть их совершеннолетие или несовершеннолетие, а количественным — возраст работающих. Анализируя их возраст, можно использовать два подхода: 1) определять возраст всех объектов исследования; 2) определять возраст объектов только для отдельной представительной группы и из этого делать выводы, касающиеся всех объектов исследований. Конечно, лучше всего проводить сплошное обследование, т.е. изучить каждый объект, однако во многих случаях это сделать невозможно (большое число объектов, недоступность, трудоемкость и др.).

Сущность выборочного метода заключается в том, что обследованию подвергаются не все объекты совокупности, а только некоторая их часть, случайно выбранная из всего множества объектов. Существенно, что выводы, полученные при изучении этой части, распространяются на всю совокупность объектов.

Все множество объектов, подлежащих исследованию, называется *генеральной совокупностью*. Обычно генеральная совокупность содержит конечное множество объектов. Оно, как правило, велико, поэтому при теоретических выводах объем генеральной совокупности часто предполагается бесконечным.

Множество случайным образом отобранных объектов называется *выборочной совокупностью*, или просто *выборкой*. Число объектов выборочной совокупности называют *объемом выборки*. Выборка называется *репрезентативной* (представительной), если по ее данным можно достаточно уверенно судить об интересующем нас признаке генеральной совокупности. Так, для того, чтобы оценить будущий итог выборов, например мэра, можно сделать выборку из генеральной совокупности (всех избирателей) и исследовать результаты опросов. Если вся выборка будет представлена жителями одного элитного дома, то она не будет репрезентативной. Репрезентативная выборка должна состоять из случайно выбранных избирателей со случайно выбранных избирательных участков.

14.2. Вариационные ряды и их характеристики

Пусть для изучения количественного признака X из генеральной совокупности отобрано n объектов, характеризуемых статистическими данными x_1, x_2, ..., x_n. Наблюдаемые значения x называются *вариантами*. Если их упорядочить, т.е. расположить в порядке возрастания, то полученная последовательность образует *вариационный ряд*. Такая операция расположения выборочных значений в порядке неубывания называется *ранжированием*.

Среди вариантов могут оказаться равные, тогда результат испытаний можно представить в виде табл. 15, где $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_k$, n_i — *частота* появления значения x_i, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$

Таблица 15

x_1	x_2	...	x_k
n_1	n_2	...	n_k

Относительной частотой w_i варианта x_i называется отношение ее частоты к объему выборки: $w_i = n_i / n$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$, т.е. сумма относительных частот всегда равна единице.

Вариационные ряды удобны для статистического оценивания функции распределения случайной величины $F_n(x)$ — *эмпирической функции распределения* случайной величины x. Она и определяет приближенно функцию распределения $F(x)$. Основная теорема математической статистики утверждает, что при больших значениях n эмпирическая функция распределения приближается к теоретической: $F_n(x) \to F(x)$ при $n \to \infty$.

Для исследований полезно построить гистограмму. *Гистограммой частот* называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению n_i/h (плотность частоты). Площадь частичного i-го прямоугольника равна $h(n_i/h) = n_i$ — сумме частот вариантов, попавших в i-й интервал. Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки n.

Гистограмма относительных частот строится так: интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h, далее определяются количества значений (частот), попавших в каждый из интервалов. Затем строится столбчатая функция, высота столбцов которой в отдельном i-м интервале равна $f_n(x) = w_i/h$. Гистограмма $f_n(x)$ является эмпирической плотностью вероятностей. Общая площадь под такой гистограммой равна единице.

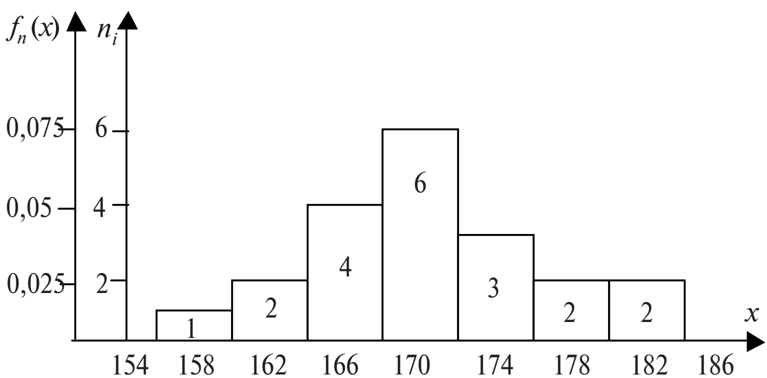
Пример. Построить гистограмму и эмпирическую функцию распределения роста (в см) выборочной группы из $n = 20$ человек для следующей выборки: 165, 158, 170, 180, 163, 171, 168, 174, 162, 177, 175, 166, 169, 179, 164, 170, 169, 167, 175, 181.

Расположим значения выборки в порядке возрастания, т.е. в виде вариационного ряда: 158, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 169, 170, 170, 171, 174, 175, 175, 177, 179, 180, 181.

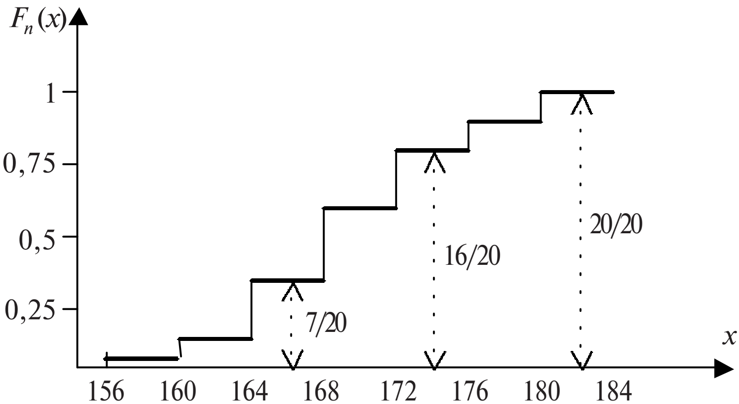
Диапазон изменения роста выборочной группы находится в диапазоне от 158 до 181 см, т.е. $x_{max} - x_{min} = 181 - 158 = 23$ см. Это интервал варьирования или «размах». Число интервалов в гистограмме должно быть, во-первых, не менее 5—7 и, во-вторых, быть удобным для ее построения. Например, при интервале 4 см, получаем 7 интервалов: 156—160; 160—164; ...; 180—184. Сведем все необходимые значения в таблицу.

Гистограмма (диаграмма) распределения представлена на рис. 38. В диаграмме на оси ординат откладывается число значений, попавших в i-й интервал, на гистограмме — значения $f_n(x) = w_i/h$. При этом в интервал $(x_{i-1} — x_i)$ помещают значения x, которые меньше x_i, т.е. в первом интервале $n_1 = 1$ (158 см); во втором — $n_2 = 2$ (162, 163); в третьем — $n_3 = 4$ (164, 165, 166, 167) и т.д., в седьмом интервале $n_7 = 2$ (180, 181).

Частичный интервал длины $h = 4$	156–160	160–164	164–168	168–172	172–176	176–180	180–184
Сумма частот вариант частичного интервала n_i	1	2	4	6	3	2	2
Плотность частоты n_i/h	0,25	0,5	1	1,5	0,75	0,5	0,5
Плотность относительной частоты $w_i/h = n_i/(nh)$	0,0125	0,025	0,05	0,075	0,0375	0,025	0,025
Накопленная относительная частота	1/20	3/20	7/20	13/20	16/20	18/20	1



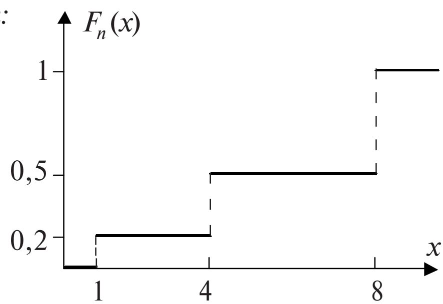
Эмпирическая функция распределения $F_n(x)$, как и теоретическая, не убывает, а ее значения не выходят за пределы интервала [0; 1] (см. рисунок).



Упражнение. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки (см. таблицу).

x_i	1	4	8
n_i	10	15	25

Ответ:



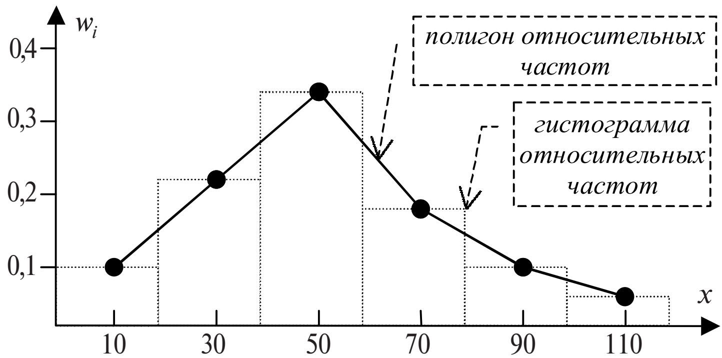
Каждую пару значений (x_i, n_i) из распределения выборки можно трактовать как точку на координатной плоскости. Тогда так же можно рассматривать и пары значений (x_i, w_i) относительного распределения выборки. Ломаная, отрезки которой соединяют точки (x_i, n_i), называется *полигоном частот*. Ломаная, соединяющая на координатной плоскости точки (x_i, w_i), называется *полигоном относительных частот*.

Пример. В таблице приведены данные о почасовой оплате труда работников одного предприятия. Построить полигон и гистограмму относительных частот.

Зарплата, руб./ч	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120
Число работников	10	23	34	18	10	5

Легко убедиться, что объем выборки $n = 100$. Вычислим относительные частоты w_i всех вариантов x_i (примем за них середины интервалов) и сведем результаты в таблицу. Затем построим полигон и гистограмму относительных частот.

Зарплата, руб./ч	10	30	50	70	90	110
Относительная частота $w_i = n_i/n$	0,1	0,23	0,34	0,18	0,1	0,05



Упражнение. Построить полигон относительных частот статистического распределения, приведенного в таблице.

x_i	1	4	7	10	12
w_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

14.3. Числовые характеристики статистических оценок

Оценки параметров генеральной совокупности, полученные на основании выборки, называются *статистическими*. Существует два рода оценок: точечные и интервальные. Если статистическая оценка характеризуется одним числом, она называется *точечной*, если двумя числами (концами доверительного интервала) — *интервальной*. Здесь рассмотрим лишь некоторые точечные оценки, к числу которых относятся математическое ожидание (среднее значение) $\overline{x}$, дисперсия D или среднеквадратическое отклонение σ.

Пусть имеется некоторая генеральная совокупность, каждый объект которой наделен количественным признаком X. При случайном извлечении объекта из генеральной совокупности становится известным значение x признака X этого объекта.

Допустим, что из теоретических соображений удалось установить, к какому типу распределений относится признак X. Естественно, возникает необходимость в оценке, т.е. приближенном определении, параметров распределения. К примеру, если известно, что изучаемый признак распределен в генеральной совокупности нормально, то надо оценить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение, так как эти два параметра полностью определяют нормальное распределение.

Как правило, в распоряжении исследователя имеются лишь данные выборки $x_1, x_2, ..., x_n$, полученные в результате n наблюдений. *Выборочной средней* $\overline{x}_{\text{в}}$ называется среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Если же значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, ..., n_k$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k),$$

или

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i.$$

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние наблюдаемых значений количественного признака выборки вокруг своего среднего значения $\overline{x}_{\text{в}}$, вводят выборочную дисперсию. *Выборочной дисперсией* $D_в$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений признака X от выборочной средней $\overline{x}_в$.

Если все значения x_1, x_2, ..., x_n признака выборки объема n различны, то

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_в)^2.$$

Если же значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, ..., n_k$, причем $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x}_в)^2 n_i.$$

Более удобная формула для выборочной дисперсии имеет вид

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i x_i^2 - (\overline{x}_в)^2.$$

Выборочным средним квадратическим отклонением называется квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_В = \sqrt{D_В}.$$

Пример. Выборка задана следующей таблицей распределения.

Варианта x_i	1	2	3	4	5	6	10
Частота n_i	5	10	15	35	16	15	4

Найти выборочные характеристики: среднюю, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Найдем сначала $\overline{x}_в$:

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k) =$$

$$= \frac{1\cdot 5 + 2\cdot 10 + 3\cdot 15 + 4\cdot 35 + 5\cdot 16 + 6\cdot 15 + 10\cdot 4}{5 + 10 + 15 + 35 + 16 + 15 + 4} = 4{,}2.$$

Затем по приведенным выше формулам определяем две другие искомые величины:

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - (\overline{x}_{\text{в}})^2 =$$

$$= \frac{5\cdot1+10\cdot4+15\cdot9+35\cdot16+16\cdot25+15\cdot36+4\cdot100}{100} - 4{,}2^2 = 3{,}16.$$

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}} = \sqrt{3{,}16} = 1{,}778.$$

Упражнения

1. Для заданного в виде таблицы распределения найти выборочные характеристики: среднюю, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Вариант x_i	–5	–3	–1	1	3	5	7	9
Частота n_i	19	47	22	6	1	2	2	1

2. Дана выборка: 3, 6, 1, 3, 5, 6, 2, 3. Найти среднее и дисперсию выборки (предварительно составить вариационный ряд и получить таблицу распределения).

Ответ: **1**. $\overline{x}_{\text{в}} = -2{,}16$; $D_{\text{в}} = 6{,}9744$; $\sigma_{\text{в}} = 2{,}6409$. **2**. $\overline{x}_{\text{в}} = 3{,}625$; $D_{\text{в}} = 2{,}984$.

Изученные точечные оценки параметров распределения могут быть приняты в качестве первоначальных ориентировочных результатов обработки наблюдений или статистической отчетности. Недостаток точечных оценок в том, что неизвестно, с какой точностью и достоверностью получены значения параметров, например, выборочные значения случайной величины *X*. Очевидно, что среднестатистическое значение $\overline{x}_{\text{в}}$ отличается от истинного среднего значения. Степень этого отличия можно оценить методом доверительных интервалов, однако для получения интервальных оценок требуются, в частности, знание значений функций Лапласа, поэтому «вручную» проводить такие расчеты достаточно сложно. В век информационных технологий они легко выполняются с использованием пакета Excel, но это выходит за рамки настоящего пособия.

14.4. Статистическая проверка гипотез

Сущность и цель проверки гипотез легче усвоить, если исходить из того, что все совокупности являются в известном смысле выборочными. Поэтому одной из задач математической статистики является отыскание закона распределения случайной величины в ее генеральной совокупности на основании известных данных (из опыта или наблюдения, т.е. из выборки) о ее значениях. Если есть основания предположить вид этого закона (назовем его А), то выдвигается *гипотеза*: генеральная совокупность распределена по закону А. Гипотезу о виде предполагаемого распределения (нормальное, биномиальное, равномерное, Фишера и др.) или о параметрах известного распределения называют *статистической*. Таким образом, *статистической гипотезой* называют любое высказывание о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений генеральной совокупности.

Наряду с выдвигаемой гипотезой рассматривается и противоречащая ей гипотеза. Если выдвигаемая гипотеза будет отвергнута, то имеет место противоречащая гипотеза. По этому признаку различают гипотезы нулевую и конкурирующую. *Нулевой* (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0, *конкурирующей* (альтернативной) — гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Примеры

1. Нулевая гипотеза H_0: генеральная совокупность распределена по нормальному закону. Тогда гипотеза H_1: генеральная совокупность не распределена по нормальному закону.

2. Нулевая гипотеза H_0: $M_x = M_y$ (т.е. математические ожидания для двух независимых выборок нормально распределенной совокупности равны). Тогда гипотеза H_1 может иметь вид H_1: $M_x \neq M_y$.

Возникает естественный вопрос: а что это дает, какой практический смысл подтверждения, например, нулевой гипотезы в последнем примере? Данные часто можно группировать в соответствии с каким-либо признаком, поэтому важно знать, является ли этот признак статистически значимым или нет. О значимости признака можно судить по средним значениям в каждой выборке: если средние не сильно различаются, то можно достаточно уверенно предположить, что он не является значимым. Например, выборка содержит данные о доходах двух групп: студентов и всех остальных, мужчин и женщин и т.д. Этой же задаче легко придать экономическую «окраску». Пусть, например, требуется сравнить данные о производительности труда на предприятии за два года: существенно изменилась она или нет.

И еще одно отступление. Чуть выше статистические гипотезы были разделены на две группы: гипотезы о параметрах и гипотезы о функциях распределения. Поскольку методы проверки гипотез о параметрах хорошо развиты в основном для нормальной совокупности, вопрос о виде распределения приобретает особую важность. Прежде чем применять, скажем, критерий Стьюдента при проверке гипотезы о математическом ожидании, хорошо бы убедиться, что выборка на самом деле распределена по нормальному закону. Закон распределения полезно знать и во многих других случаях, так что в первом примере выдвинутая гипотеза далеко не экзотическая.

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение, т.е. она полностью определяет теоретическое распределение случайной величины по имеющейся выборке ее значений. В противном случае гипотеза называется *сложной*. Обычно основная гипотеза H_0 является простой, в то время как ее альтернатива может быть или простой, или сложной.

Выдвигаемая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость ее проверки. Поскольку проверку производят статистическими методами, то ее и называют статистической.

Для проверки нулевой гипотезы вводится некоторая вычисляемая случайная величина K, называемая *критерием* (или статистическим критерием), распределение которой заранее известно и которая характеризует отклонение выборочных характеристик от их гипотетических значений.

В результате статистической проверки гипотезы может быть принято *неправильное решение*, т.е. могут быть допущены следующие ошибки.

Ошибка первого рода — состоит в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза. Вероятность такой ошибки обозначается через a и называется *уровнем значимости* критерия. Наиболее часто уровень значимости принимают равным 0,05 или 0,01. Например, если уровень значимости принять 0,05, то это означает, что в 5 случаях из 100 мы рискуем допустить ошибку первого рода (отвергнуть правильную гипотезу). Чем меньше уровень значимости, тем меньше вероятность отвергнуть верную гипотезу. Величина $1-\alpha$ равна вероятности принять верную гипотезу и называется *уровнем доверия*, т.е. надежностью критерия.

Ошибка второго рода — состоит в том, что будет принята неправильная нулевая гипотеза, т.е. отвергнута верная конкурирующая гипотеза. Вероятность такой ошибки обозначают через β. Вероятность принять гипотезу H_1, если она верна, называется *мощностью критерия* $1-\beta$.

Ошибку первого рода называют иногда «ошибкой продавца», а ошибку второго рода — «ошибкой покупателя». Действительно, пусть мы производим какой-то товар на продажу. Если объем выпуска большой, то невозможно проверить качество каждого изделия. Применяется выборочный контроль: случайным образом отбираются экземпляры для проверки и на основании ее результатов делается вывод о том, хороша или нет вся партия. Фактически проверяется нулевая гипотеза о том, что партия товара удовлетворяет требованиям качества. Естественная альтернатива этому — вся партия некачественная. Ошибка первого рода в данном случае состоит в том, что фактически хорошая продукция забракована. Это невыгодно производителю товара, т.е. имеет место «ошибка продавца». Наоборот, при ошибке второго рода принят товар на самом деле некачественный, что невыгодно потребителю, и это уже «ошибка покупателя».

Правильное решение может быть принято также в двух случаях:

1) гипотеза принимается, причем и в действительности она правильная;

2) гипотеза отвергается, причем и в действительности она неверная.

Для проверки гипотезы по данным выборок вычисляют частные значения входящих в критерий величин и таким образом получают частное (наблюдаемое) значение критерия. *Наблюдаемым значением* $K_{\text{набл}}$ называют значение критерия, вычисленное по выборкам.

После выбора определенного критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другое — при которых она принимается.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез можно сформулировать так:

- если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области — нулевую гипотезу отвергают;
- если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы — гипотезу принимают.

Критическая область и область принятия гипотезы представляют собой интервалы. Следовательно, существуют точки, которые их разделяют. *Критическими точками* (границами) $k_{кр}$ называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Различают одностороннюю (право- или левостороннюю) и двустороннюю критические области. На практике выбор критические области обычно определяется видом альтернативной гипотезы.

Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K > k_{кр}$, где $k_{кр} > 0$ (рис. 33).

Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < k_{кр}$, где $k_{кр} < 0$ (рис. 34).

Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенствами $K < k_1$, $K > k_2$, где $k_2 > k_1$. В частности, если критические точки симметричны относительно нуля, то область определяется неравенством $|K| > k_{кр}$ или $K < -k_{кр}$, $K > k_{кр}$ (рис. 35).

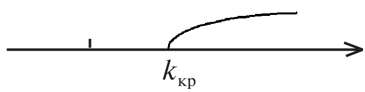


Рис. 33

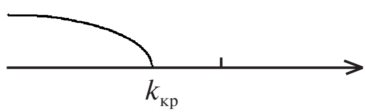


Рис. 34

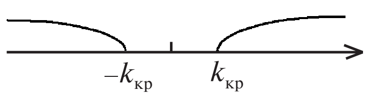


Рис. 35

Для отыскания критической области, очевидно, достаточно найти критические точки. Например, правосторонняя критическая область задается неравенством $K > k_{кр}$, $k_{кр} > 0$. Затем задаемся достаточно малой вероятностью — уровнем значимости α о определяем критическую точку $k_{кр}$, исходя из требования, чтобы при условии справедливости нулевой гипотезы вероятность того, что критерий K примет значение, большее $k_{кр}$, была равна принятому уровню значимости, т.е. $P(K > k_{кр}) = \alpha$.

В случае левосторонней критической области $P(K < k_{кр}) = \alpha$.

Критические точки двусторонней критической области находят исходя из требования, чтобы при справедливости нулевой гипотезы сумма вероятностей того, что критерий примет значение меньше k_1 или больше k_2, была равна уровню значимости, т.е. $P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha$.

Если распределение критерия симметрично относительно нуля, то $P(K > k_{кр}) = \alpha/2$.

В качестве критерия (иногда его называют статистикой или критерием согласия эмпирических наблюдений к выдвинутой гипотезе) применяют один из следующих критериев: Пирсона, Колмогорова, Фишера, Стьюдента и др. Для каждого критерия имеются соответствующие таблицы, по которым и находят критическую точку, удовлетворяющую этому требованию.

Каждый из критериев имеет свои особенности. Так, например, *критерий Стьюдента* предназначен для сравнения средних двух нормально распределенных случайных величин.

Критерий Фишера используется в задачах проверки «статистического» равенства дисперсий в двух выборках в предположении, что генеральная совокупность распределена нормально.

Обычно гипотезы о виде закона распределения выдвигаются на основе результатов построения эмпирических функций распределения или гистограмм.

Критерий Колмогорова проверки гипотезы о виде закона распределения является наиболее простым, однако его можно применять только в том случае, когда теоретическое распределение известно заранее, т.е. известен не только вид функции распределения, но и все входящие в нее параметры.

Критерии Пирсона — один из наиболее часто применяемых критериев для проверки гипотезы о виде закона распределения случайных величин. Он позволяет производить проверку гипотезы соответствия опытного (наблюдаемого, эмпирического) распределения теоретическому (предполагаемому) не только в случаях, когда последний известен полностью, но и тогда, когда параметры предполагаемого закона распределения определяются на основании опытных данных.

Для этого критерия в качестве величины, характеризующей степень различия между теоретическим и выборочным законами распределения, выбирается случайная величина $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$, которая учитывает расхождения между теоретическими (n'_i) и выборочными (n_i) частотами. Эта случайная величина называется χ^2 (читается «хи-квадрат). Ее закон распределения известен и называется χ^2 с k степенями свободы. Число степеней свободы k зависит от вида закона распределения и количества членов выборки; например, для нормального закона распределения оно определяется формулой $k = r — 3$, где r — число интервалов, на которые разбита выборка.

В качестве демонстрации методики проверки статистической гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона рассмотрим конкретный расчет.

Пример. Имеются результаты опроса группы молодежи, состоящей из 200 человек, о возрасте первого употребления наркотиков. Результаты представлены в виде интервального вариационного ряда.

Интервал возрастов	11–12	12–13	13–14	14–15	15–16	16–17	17–18	18–19	19–20	20–21
Количество человек в группе n_i	7	12	14	25	48	42	24	13	10	5

Требуется с помощью критерия Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ оценить гипотезу о нормальном распределении возрастов начала употребления наркотиков, т.е. тем самым подтвердить гипотезу о том, что явление наркомании порождено множеством различных причин.

В первую очередь вычисляем выборочную среднюю

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \frac{7\cdot 11{,}5 + 12\cdot 12{,}5 + \ldots\ + 5\cdot 20{,}5}{200} = 15{,}885$$

и выборочное среднее квадратичное отклонение

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}} = \sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{7(11{,}5-15{,}885)^2 + 12(12{,}5-15{,}885)^2 + \ldots\ + 5(20{,}5-15{,}885)^2}{200}} =$$

$$= 2{,}014.$$

Составим расчетную таблицу для определения теоретических частот $n'_i = \frac{nh}{\sigma_{\text{в}}}\cdot\varphi(u_i)$; учитывая, что объем выборки $n = 200$, шаг (разность между двумя соседними вариантами) $h = 1$,

$$n'_i = \frac{200\cdot 1}{2{,}014}\varphi(u_i) = 99{,}3\varphi(u_i), \quad u_i = \frac{x_i - \bar{x}_{\text{в}}}{\sigma_{\text{в}}}, \ \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}.$$

Значения последней функции табулированы и приводятся в большинстве учебников или задачников по математической статистике.

№ интервала i	Середина интервала x_i	Выборочные частоты n_i	$u_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_в}{\sigma_в}$	$\varphi(u_i)$	Теоретические частоты
1	11,5	7	–2,18	0,0371	3,7
2	12,5	12	–1,68	0,0973	9,7
3	13,5	14	–1,18	0,1989	19,8
4	14,5	25	–0,69	0,3144	31,2
5	15,5	48	–0,19	0,3918	38,9
6	16,5	42	0,31	0,3802	37,8
7	17,5	24	0,80	0,2897	28,8
8	18,5	13	1,30	0,1714	17,0
9	19,5	10	1,79	0,0804	8,0
10	20,5	5	2,29	0,0290	2,9

Сравним выборочные и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого также составим следующую расчетную таблицу.

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$(n_i - n'_i)^2/n'_i$
1	7	3,7	3,3	10,89	2,94
2	12	9,7	2,3	5,29	0,55
3	14	19,8	–5,8	33,64	1,70
4	25	31,2	–6,2	38,44	1,23
5	48	38,9	9,1	82,81	2,13
6	42	37,8	4,2	17,64	0,47
7	24	28,8	–4,8	23,04	0,80
8	13	17,0	–4,0	16,00	0,94
9	10	8,0	2,0	4,00	0,50
10	5	2,9	2,1	4,41	1,52
$\sum$	200				$\chi^2 = 12,78$

Как видно, значение критерия Пирсона $\chi^2 = 12,78$. Критическое значение $\chi^2_{кр}$ при уровне значимости $\alpha = 0,05$ и степенях свободы, равных $k = 10 — 3 = 7$, определяется значением

14,067 (берется также из таблиц учебников). Так как $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, то нет оснований отвергать гипотезу H_0 о нормальном законе распределения возрастов лиц, впервые употребляющих наркотические вещества. Другими словами, расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами незначимо (случайно), тем самым мы подтверждаем экспериментально мнение специалистов, что проблема наркомании имеет комплексный характер.

В заключение отметим, что в настоящее время нет необходимости вручную проводить достаточно громоздкие вычисления по статистическому анализу вообще и статистической проверке гипотез в частности, поскольку соответствующие опции есть в широко распространенном компьютерном пакете Excel, а также в специализированных статистических пакетах типа SADIA, STATGRAPHICS[1] и др.

14.5. Корреляционно-регрессионный анализ

14.5.1. Функциональная и корреляционная зависимости

Зависимость между переменными может быть описана разными способами.

Функциональная зависимость — это такая зависимость между переменными, когда каждому возможному значению одной независимой переменной соответствует определенное, однозначное значение другой, зависимой переменной. Например, для двух переменных x и y функциональная зависимость может быть представлена в виде: $y = f(x)$, где x — независимая переменная, а y — соответствующее ей значение функции.

Кроме таких однозначных функциональных связей, между переменными величинами существуют зависимости, при которых каждому значению одной пе-

[1] *Тюрин Ю. Н., Макаров А. А.* Статистический анализ данных на компьютере. – М.: ИНФРА-М, 1998.

ременной соответствует не одно, а множество значений другой переменной. Такие зависимости называются *корреляционными*, или *корреляцией*.

Например, если рассматривать связь между ростом и массой тела группы мужчин, то каждому конкретному значению роста могут соответствовать различные значения массы, т.е. мужчины одного роста могут существенно отличаться по массе тела. Аналогично люди, имеющие одинаковую массу тела, могут различаться по росту. Зависимости такого типа имеют не функциональный, а статистический характер.

Знание такого типа статистических зависимостей имеет большое значение, так как позволяет прогнозировать значения одних признаков (показателей), если известны значения других.

Корреляционная связь между признаками бывает линейной и нелинейной, положительной и отрицательной. Задачей корреляционного анализа является выявление направления и силы связи между варьирующими признаками и оценка достоверности выборочных показателей корреляции.

14.5.2. Коэффициент корреляции. Оценка достоверности коэффициента корреляции

В качестве показателя силы и направления связи между двумя варьирующими признаками x и y используется коэффициент корреляции r_{xy}, который можно вычислить по формуле:

$$r_{xy} = \Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / \sqrt{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 \, \Sigma(y_i - \bar{y})^2}.$$

Свойства коэффициента корреляции:

1. Коэффициент корреляции — это безразмерная величина, которая может принимать значения от -1 до $+1$.

2. Коэффициент корреляции принимает значения -1 или $+1$ только тогда, когда величины x и y свя-

заны линейной функциональной зависимостью. Чем ближе значение r_{xy} к -1 или $+1$, тем меньше рассеяние значений переменных около линии условных средних (см. рис. 36), тем сильнее связь между варьирующими признаками.

3. При положительной (или прямой) связи, когда при увеличении одной переменной возрастает другая переменная, коэффициент корреляции положителен и находится в пределах от 0 до +1. При отрицательной (или обратной) связи, когда при увеличении одной переменной происходит уменьшение другой переменной, коэффициент корреляции отрицателен и находится в пределах от -1 до 0.

Недостатком этого показателя является то, что он характеризует только линейные связи, т.е. такие связи, которые выражаются уравнением линейной функции.

При наличии нелинейной зависимости между варьирующими признаками можно использовать другие показатели связи, например *корреляционное отношение*. Корреляционное отношение — универсальный показатель, позволяющий характеризовать любую форму корреляционной связи.

Поскольку, как правило, применяются линейные или близкие к ним зависимости, мы будем использовать только коэффициент корреляции.

При проведении корреляционного анализа часто возникает вопрос, является ли полученный коэффициент корреляции достоверным или нет. Эмпирический коэффициент корреляции r_{xy}, как и любой другой выборочный показатель, является оценкой коэффициента корреляции генеральной совокупности, который обозначается буквой ρ.

r_{xy} является случайной величиной и сопровождается ошибкой. Поэтому он должен быть оценен. Одним из методов оценки является вычисление ошибки коэффициента корреляции S_r по следующим формулам:

$S_r = (1 - r_{xy}^2)/\sqrt{n}$ — для больших выборок ($n > 30$);

$S_r = \sqrt{(1 - r_{xy}^2)/(n - 2)}$ — для малых выборок ($n < 30$).

Выдвигается нулевая гипотеза, т.е. предположение о том, что в генеральной совокупности коэффициент корреляции $\rho = 0$. Чтобы оценить достоверность выборочного r_{xy}, определяют отношение выборочного коэффициента корреляции к своей ошибке $t = r_{xy}/S_r$. По таблицам распределения Стьюдента для принятого уровня значимости α и числа степеней свободы $k = n - 2$ (где n — число пар), находят критические значения $t_{табл}$. Если найденное значение t превышает табличное, т.е. $t \geq t_{табл}$, то нулевая гипотеза отвергается. Это значит, что коэффициент корреляции r_{xy} имеет достоверное значения, т.е. имеется связь между рассматриваемыми признаками. Если $t < t_{табл}$, то нулевая гипотеза принимается и коэффициент корреляции нельзя считать достоверным.

14.5.3. Понятие о регрессии. Уравнение регрессии. Коэффициент регрессии

Коэффициент корреляции указывает только на направление и силу связи двух переменных величин. Но он не позволяет судить о том, как количественно будет меняться одна величина при изменении другой. На этот вопрос отвечает регрессионный анализ. *Регрессия* — это изменение функции в зависимости от изменения одного или нескольких аргументов.

Как известно, зависимость между двумя переменными x и y можно выражать аналитически, т.е. с помощью формул и уравнений, а можно выразить графически.

В случае корреляционной зависимости графики для величин x и y состоят из множества точек, не укладывающихся на какую-либо определенную кривую

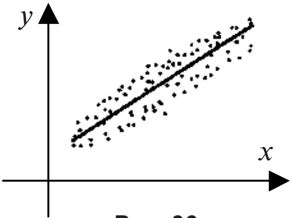


Рис. 36

(рис. 36). Но некоторое общее представление о такой зависимости может дать линия, которая проходит через средние значения величины y для каждого x (или через средние значения величины x для каждого y). Эти средние значения называют условными средними.

При увеличении числа экспериментальных точек внутри рассматриваемого интервала указанная линия будет стремиться к некоторой предельной кривой, называемой *линией регрессии*. Функция, задающая уравнение этой средней линии, называется *функцией регрессии*. Так, $y = \overline{y}(x)$ — функция регрессии y по x, а $x = \overline{x}(y)$ — функция регрессии x по y.

Таким образом, в отличие от функциональной зависимости, корреляционная зависимость может характеризоваться двумя линиями.

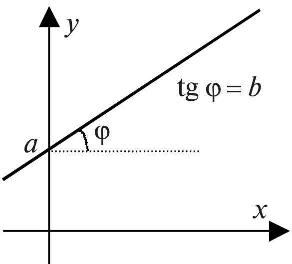


Рис. 37

Часто функция регрессии является линейной функцией, т.е. описывается уравнением

$$y = a + bx,$$

где a — начальное значение y при $x=0$; b — угловой коэффициент, равный тангенсу угла наклона линии регрессии к оси x (рис. 37).

Коэффициент b называется *коэффициентом регрессии*. Выборочное уравнение регрессии y по x имеет вид:

$$y - \overline{y} = b_{yx}(x - \overline{x}),$$

а выборочное уравнение x по y —

$$x - \overline{x} = b_{xy}(y - \overline{y}).$$

Коэффициент регрессии определяют по формулам:

$$b_{yx} = r_{xy}\sqrt{\Sigma(y_i - \overline{y})^2 / \Sigma(x_i - \overline{x})^2};$$

$$b_{xy} = r_{xy}\sqrt{\Sigma(x_i - \overline{x})^2 / \Sigma(y_i - \overline{y})^2}.$$

Если коэффициент корреляции неизвестен, то коэффициент регрессии можно определить следующим образом:

$$b_{yx} = \frac{\Sigma(y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})}{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}; \; b_{xy} = \frac{\Sigma(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\Sigma(y_i - \overline{y})^2}.$$

Коэффициент a для обоих случаев можно найти, если подставить в уравнение регрессии средние значения $\overline{x}$ и $\overline{y}$:

$$a = \overline{y} - b\overline{x}.$$

Коэффициент корреляции r_{xy} связан с коэффициентами регрессии b_{yx} и b_{xy} следующим образом:

$$r_{xy} = \sqrt{b_{yx} \cdot b_{xy}}.$$

Коэффициент регрессии (как и коэффициент корреляции) характеризует только линейную связь. При положительной связи коэффициент регрессии положителен, а при отрицательной связи — отрицателен.

Как и любая статистическая величина, коэффициент регрессии, полученный по выборочным данным, должен быть оценен. Ошибка выборочности коэффициента регрессии y по x определяется по формуле

$$S_{b_{yx}} = \sqrt{(1 - r_{xy})\Sigma(y_i - \overline{y})^2 \big/ [(n-2)\Sigma(x_i - \overline{x})^2]}.$$

Ошибка выборочности коэффициента регрессии x по y определяется по формуле

$$S_{b_{xy}} = \sqrt{(1 - r_{xy})\Sigma(x_i - \overline{x})^2 \big/ [(n-2)\Sigma(y_i - \overline{y})^2]}.$$

Выдвигается нулевая гипотеза о том, что связи между x и y нет. Достоверность выборочных коэффициентов регрессии оценивают при помощи критерия Стьюдента. Для этого находят значение $t = b_{yx} / S_{b_{yx}}$ или

$t = b_{xy} / S_{b_{xy}}$, затем по таблицам распределения Стьюдента для принятого уровня значимости α и числа степеней свободы $k = n - 2$ находят критические значения $t_{табл}$. Если $t > t_{табл}$, то нулевая гипотеза отвергается, т.е. значение коэффициента регрессии достоверно и связь между x и y имеется. Если $t < t_{табл}$, то нулевая гипотеза принимается и связи между x и y нет.

Пример. По данным таблицы найти коэффициент корреляции, оценить его достоверность. Построить уравнение регрессии.

№ п/п	x_i	y_i	$x-\overline{x}$	$(x-\overline{x})^2$	$y-\overline{y}$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})\ (y-\overline{y})$
1	33	17	1	1	1	1	1
2	43	20	11	121	4	16	44
3	34	17	2	4	1	1	2
4	29	13	–3	9	–3	9	9
5	22	13	–10	100	–3	9	30
6	31	15	–1	1	–1	1	1
7	32	17	0	0	1	1	0
	$\overline{x} = 32$	$\overline{y} = 16$		$\Sigma = 236$		$\Sigma = 38$	$\Sigma = 87$

По формуле

$$r_{xy} = \Sigma(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) / \sqrt{\Sigma(x_i - \overline{x})^2\, \Sigma(y_i - \overline{y})^2}$$

находим, что $r_{xy} = 87 / \sqrt{236 \cdot 38} = 87 / 94{,}7 = 0{,}92$. Ошибка коэффициента корреляции

$$S_r = \sqrt{(1 - r_{xy}^2)/(n-2)} = \sqrt{(1 - 0{,}92^2)/(7-2)} = \sqrt{0{,}16/5} = 0{,}179;$$

$$t = r_{xy} / S_r = 0{,}92/0{,}179 = 5{,}1.$$

По таблицам для $\alpha = 5$ % и $k = n - 2 = 7 - 2 = 5$ находим $t_{табл} = 2{,}57$.

Так как $t_{табл} < t$, то нулевую гипотезу следует отвергнуть, т.е. коэффициент корреляции является достоверным.

Коэффициенты регрессии равны

$$b_{yx} = \frac{\Sigma(y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})}{\Sigma(x_i - \overline{x})^2} = \frac{87}{236} = 0{,}37;$$

$$b_{xy} = \frac{\Sigma(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\Sigma(y_i - \overline{y})^2} = \frac{87}{38} = 2{,}3.$$

Уравнение регрессии имеет вид:

$$y - \overline{y} = b_{yx}(x - \overline{x}), \text{ т.е. } y - 16 = 0{,}37(x - 32);$$

$$x - \overline{x} = b_{xy}(y - \overline{y}), \text{ т.е. } x - 32 = 2{,}3(y - 16).$$

Методы корреляционного анализа уже применяются в социальных исследованиях, например уголовно-правовой направленности, и в частности, для изучения статистической зависимости между действием санкции правовой нормы и последующим (повторным) совершением правонарушения, сроком отбытого наказания и совершением нового преступления, жесткостью уголовного наказания, назначенного судом, и уровнем судимости, а также других зависимостей. Безусловно, в дальнейшем круг задач выявления и анализа стохастических взаимосвязей между свойствами (признаками) исследуемого явления или между различными явлениями и процессами будет существенно расширяться — этому способствует внедрение информационных технологий.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Сформулируйте содержание основных задач математической статистики.

2. Что называется выборкой и в чем состоит ее назначение?

3. Что такое статистический и интервальный ряды; полигон и гистограмма?

4. Что называют выборочной средней, выборочной дисперсией?

5. Какая гипотеза называется простой и какая сложной?

6. Сформулируйте основной принцип проверки статистических гипотез.

7. В чем состоит ошибка первого рода, ошибка второго рода?

8. Критерии Пирсона — один из наиболее применяемых критериев для проверки гипотезы о виде закона распределения случайных величин. В чем он заключается?

9. Какие зависимости называют корреляционными, или корреляцией?

10. Для чего используют коэффициент корреляции?

11. Перечислите основные свойства коэффициента корреляции.

12. Что называется регрессией?

13. Как определяется коэффициент регрессии?

Хотя аналогия часто вводит в заблуждение,
это наименьшее из того, что вводит нас в заблуждение.
С. Батлер

15. Математическое моделирование и принятие решений

Если проблему удастся перенести на язык формул, то она упрощается. Математический подход прост еще и потому, что подчиняется вполне определенным жестким правилам, которые нельзя отменить указом или иным способом. Сложность нашей жизни состоит в том, что все, что в ней случается, свободно от пут условностей.

Математика имеет дело с упрощенными моделями явлений. Природные корни некоторых математических наук скрыты от нас паутиной времени, в других, более молодых, они видны. По существу, формула (или совокупность формул) представляет собой определенный этап в построении математической модели.

15.1. Математические методы и моделирование в целенаправленной деятельности

Под *моделью* (от лат. *modulus* — мера, образец, норма) понимают такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные черты. Процесс построения и использования модели называется *моделированием*.

Математической моделью с формальной точки зрения можно назвать любую совокупность элементов и связывающих их операций. С содержательной точки зрения интересны модели, являющиеся изоморфным отображением реальных или реализуемых объектов, процессов и явлений. С математическими моделями непосредственно связан математический метод познания отображаемых моделью объектов.

Соотношение между элементами a, b и c, выражаемое формулой $a + b = c$, — это математическая модель. Она изоморфно отображает операцию объединения двух куч камней с их числами a и b в общую кучу камней, которых окажется $c = a + b$. В этом смысле операция сложения отвечает объединению двух куч в одну, а модель $a + b = c$ изоморфна этому слиянию. При этом, не объединяя кучи и не считая в ней камней, можно предсказать, что их будет ровно c.

Этот пример поясняет общий математический метод познания. Он состоит в построении для объекта, процесса или явления изоморфной математической модели (на основе элементов и операций операционной системы), ее изучении (для чего требуется выполнимость используемых в ней операций) и переносе в силу изоморфизма результатов, полученных для модели, на исходный изучаемый объект.

В этом направлении математика не только создала разнообразные внутренние модели алгебры, геометрии, функции комплексного переменного, дифференциальных уравнений и др., но и помогла естествознанию построить математические модели механики, электродинамики, термодинамики, химической кинетики, микромира, пространства-времени и тяготения, вероятностей, передачи сообщений, управления, логического вывода и др. Созданием моделей математика часто опережала потребности естествознания и техники (рис. 38).

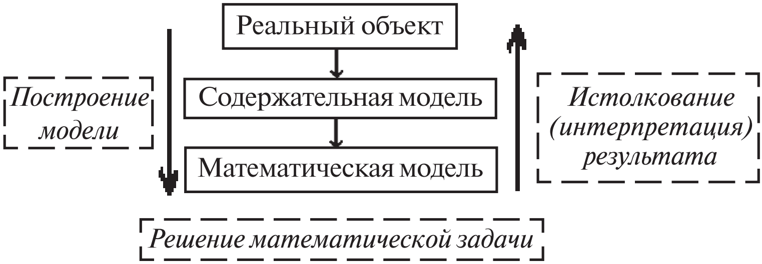


Рис. 38

Если раньше основная задача науки была в том, чтобы понять поведение изучаемой системы, то теперь актуальной является возможность *оценить различные стратегии, обеспечивающие достижение цели*.

Реализация универсального математического метода познания и есть, по-видимому, *основная цель* и *задача современной математики*. Она включает в первую очередь построение новых, неведомых математических моделей, в частности в биологии, для познания жизни и деятельности мозга, мироздания и микромира, новых, фантастических технологий и техники, а также для познания экономических и социальных явлений с помощью математических моделей различными математическими методами.

Не следует забывать о дальнейшем расширении и обогащении операционной системы и ее реальных возможностей, гигантски усиливаемых вычислительными методами, вычислительными машинами и средствами программирования. Одним из мощных программных средств обеспечения математического моделирования систем любого назначения является интегрированный пакет *MathCAD*. Есть и другие автоматизированные системы численных и аналитических расчетов, обладающие дружественным к пользователю интерфейсом и большими вычислительными возможностями, например математические пакеты *Derive, MATLAB, Maple, Mathematica, SPSS, Statistica*. Кроме того, имеется много узкоспециализированных или менее известных пакетов.

В современном мире управление — дело отнюдь не легкое, поскольку политическая, экономическая и социальная структуры общества являются сложными и постоянно усложняются еще больше. И в то же время для эффективного управления необходимо учитывать характер взаимоотношений между различными элементами организации, а также взаимодействия ее с окружающей средой. Один из мощных инструментов анализа — моделирование. Однако создание новой модели — *процесс творческий*, близкий к искусству. Анализ адекватной математической модели дает в руки менеджеров, управляющих и других руководителей эффективный инструмент, который может использоваться для предсказания поведения систем и сравнения получаемых результатов. Таким образом, моделирование позволяет логическим путем прогнозировать последствия альтернативных действий и достаточно уверенно показывает, какому из них следует отдать предпочтение. Применение моделей дает руководителям и менеджерам метод, повышающий эффективность их суждений и интуиции (рис. 39).

Классификация математических моделей		
Элементы модели		
Исходные данные	Искомые переменные	Зависимости
Детерминированные Случайные	Непрерывные Дискретные	Линейные Нелинейные

Рис. 39

В настоящее время нет предпосылок выделять «самые элементарные» и «неделимые» кирпичики мироздания. Поэтому можно утверждать, что любой объект исследования является бесконечно сложным и характеризуется бесконечным числом параметров. При построении модели исследователь всегда исходит из *целей* исследования и учитывает только наиболее важные для достижения поставленных целей факторы. Поэтому любая модель не тождественна объекту-оригиналу и, следовательно, *неполна*, поскольку при ее построении исследователь выделил только наиболее существенные, с его точки зрения, факторы. Отброшенные факторы, несмотря на свое относительно малое влияние на поведение объекта по сравнению с факторами, выбранными в качестве существенных, все же в совокупности могут приводить к значительным различиям между объектом и его моделью. «Полная» модель, очевидно, будет полностью тождественна оригиналу. Данную мысль хорошо отражает фраза, что «наилучшей моделью кота является другой кот, а еще лучше — тот же самый кот». В то же время, при моделировании должно «исключаться какое бы то ни было самоотнесение, ничто не может быть моделью самого себя».

Если результаты моделирования удовлетворяют исследователя и могут служить основой для прогнозирования поведения или свойств исследуемого объекта, то говорят, что модель *адекватна* (от лат. *adaequatus* — приравненный) объекту. При этом адекватность модели зависит от целей моделирования и принятых критериев. Учитывая заложенную при создании неполноту модели, можно утверждать, что идеально адекватная модель принципиально невозможна.

Математическая модель может использоваться традиционным способом, т. е. для получения какого-то частного решения, но в сфере управления она успешнее применяется для *имитационного моделирования*. Имитация (от лат. *imitatio* — подражание) — это воспроизведение на модели той или иной реальной ситуации, ее исследование и в конечном счете нахождение наиболее удачного решения.

Имитационное моделирование основывается главным образом на теории сложных систем, теории вероятностей и математической статистике. Но в то же время имитационное моделирование и экспериментирование, как и само управление, во многом остаются творческими процессами. Собственно имитационное моделирование состоит из конструирования математической модели реальной системы и постановки на ней экспериментов с тем, чтобы оценить (с точки зрения потребности в ресурсах, например) различные стратегии, обеспечивающие достижение цели данной системы.

При проектировании сложных технических систем, управлении промышленным или сельскохозяйственным производством, руководстве военными действиями большое значение имеет опыт, позволяющий выделить наиболее существенные факторы, охватить ситуацию в целом и выбрать оптимальный путь реализации поставленной цели. Опыт помогает также найти аналогичные случаи в прошлом и по возможности избежать ошибочных действий.

Под опытом подразумевается не только собственная практика, но и опыт, описанный в книгах, монографиях, обобщенный в инструкциях, рекомендациях и других руководящих материалах. Поэтому, прежде чем принимать решение, полезно изучить опыт, расспросить знающих людей, посмотреть, как поступали в подобных случаях раньше. Естественно, что, когда решение апробировано, т.е. известно, какое именно решение наилучшим образом удовлетворяет поставленным целям, проблемы принятия решения и оптимального управления попросту не существует — решение известно наперед.

Однако практически не бывает совершенно одинаковых ситуаций, поэтому принимать решения и осуществлять управление приходится в условиях неполной и недостаточной информации. В таких случаях недостающую информацию пытаются получить, используя догадки, предположения, результаты научных исследований и особенно изучение на моделях. Научно обоснованная теория управления фактически представляет собой набор методов пополнения недостающей информации об управляемом процессе, а точнее говоря, о том, как поведет себя объект управления при выбранном воздействии.

Получается, что для успешного управления надо предсказывать поведение системы в будущем. Человечество всегда хотело знать будущее, поэтому с древнейших времен создавались различные методы предсказаний. Одни из них с позиций сегодняшнего дня кажутся наивными, например гадание на кофейной гуще или по потрохам черного петуха. Другие не поняты до сих пор, несмотря на огромные усилия ученых, например возможность предсказания стихийных бедствий (извержение вулканов, цунами), наблюдая за поведением некоторых животных (рыб, муравьев и др.). Наконец, третьи получили четкое обоснование и широко используются в научной и инженерной практике. Это методы математического прогнозирования.

Следует учитывать, что некоторые объекты и явления вообще не могут быть изучены непосредственным образом. Недопустимы, например, эксперименты с экономикой страны или со здоровьем населения. Принципиально неосуществимы эксперименты с прошлым какого-то государства или народа («История не терпит сослагательного наклонения»). Невозможно (по крайней мере в настоящее время) провести эксперимент по прямому исследованию структуры звезд. Многие эксперименты неосуществимы из-за своей дороговизны или рискованности для человека и/или среды его обитания.

В зависимости от вида системы и конкретных целей, которые ставятся при анализе, используют разные методы описания систем, т. е. существуют различные подходы к математическому моделированию и системному анализу. В основе каждого подхода лежат те или иные представления, какой-то основной набор идей и теоретических предпосылок или, как сейчас принято говорить, *определенная концепция*.

Итак, модель нужна для того, чтобы:

- понять, как устроен конкретный объект: какова его структура, основные свойства, законы развития, саморазвития и взаимодействия с окружающей средой;
- научиться управлять объектом или процессом, определять наилучшие способы управления при заданных целях и критериях;
- прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект.

15.2. Исследование операций и принятие решений

В настоящее время, когда последствия принимаемых решений оказывают большое влияние на все стороны социальной и общественной жизни, затрагивают интересы всего населения страны, необходимы рекомендации по правильному и научно обоснованному управлению. В самых разных областях — организация промышленного или сельскохозяйственного производства, эксплуатация транспорта, образование, здравоохранение, бытовое обслуживание населения, телефонная и почтовая связь, торговля и общественное питание — возникают сходные по постановке задачи, обладающие рядом общих признаков и решаемые сходными методами.

Типичная ситуация такова: организуется какое-то мероприятие, которое можно осуществить тем или другим способом, т.е. выбрать решение из ряда возможных вариантов. Какой из вариантов выбрать? Каждый вариант обладает как преимуществами, так и недостатками. Причем в силу сложности обстановки не ясно, какой из всех возможных лучше других. Для этого проводится серия математических расчетов. Их задача — помочь ответственным за принятие решения сделать обоснованный выбор.

Впервые научные методы обоснования принимаемых решений были применены в военном деле. Так, в годы Второй мировой войны для облегчения принятия решения командующим штабы осуществляли основанные на математических расчетах исследования, показывающие возможные результаты различных военных операций. Поэтому эти методы получили название *исследование операций*. В дальнейшем стало ясно, что операции, представляющие собой ряд целенаправленных действий, имеют место не только в военном деле, но и в промышленности, на транспорте, в сельском хозяйстве, бытовом обслуживании населения и др.

Под термином «исследование операций» понимают применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях человеческой деятельности.

Операцией называют комплекс мероприятий, объединенных общим замыслом и направленных на достижение поставленной цели. Операция является управляемым мероприятием.

При всем многообразии содержания конкретных работ по исследованию операций каждое такое исследование проходит последовательно следующие этапы: 1) постановка задачи; 2) построение математической модели; 3) нахождение метода решения; 4) проверка и корректировка модели; 5) реализация найденного решения на практике.

Постановка задачи. Это чрезвычайно ответственный этап операционного исследования. Основные вопросы постановки задачи: набор независимых параметров (переменных); определение условий их изменения; выбор количественного критерия; формулировка задачи поиска.

Первоначально задачу формулируют с позиций заказчика. Такая постановка задачи обычно не окончательная. Во время анализа исследуемой системы задача постепенно уточняется. На этом этапе роль операционной группы состоит в проведении тщательного обследования объекта, изучении множества факторов, влияющих на результаты исследуемого процесса.

После сбора и анализа данных операционная группа выделяет совокупность существенных факторов, проводит консультации с заказчиками и окончательно уточняет содержательную (словесную) постановку задачи.

Для выяснения упущенных факторов и их взаимосвязей при необходимости проводят дополнительное обследование объекта.

Построение математической модели. Получив достаточно строгую и логически непротиворечивую, содержательную постановку задачи, строят ее математическую модель. Этот процесс называется *формализацией задачи*.

В самом общем случае математическая модель задачи имеет вид: найти max (или min) *целевой функции* (показатель качества или эффективность системы) при заданных ограничениях. Совокупность всех ограничений, каждое из которых представляет собой уравнение или неравенство, называется *системой ограничений*. Целевая функция и ограничения математически выражаются через *параметры* (характеристики, значения которых не зависят от принимаемого решения) и *управляемые переменные* (характеристики, значения которых определяются принимаемым решением). Среди управляемых переменных выделяют те, значения которых определяются непосредственно решением, и называют их *переменными решения*. Остальные управляемые переменные, являющиеся функциями переменных решений и параметров, называют *зависимыми переменными*.

Множество всех значений переменных решения, удовлетворяющих каждому ограничению, называется *множеством допустимых решений* (планов); задача исследования операций называется допустимой, если она имеет непустое множество допустимых решений. *Оптимальным* называется допустимое решение, доставляющее оптимальное значение (максимальное или минимальное — в зависимости от поставленной цели) целевой функции задачи.

Нахождение метода решения. Для нахождения оптимального решения задачи в зависимости от структуры целевой функции и ограничений применяют те или иные методы теории оптимальных решений, называемые методами математического программирования[1].

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ	
Детерминированные модели	Стохастические (вероятностные) модели
⇓	⇓
Линейное программирование Целочисленное программирование Потоки в сетях Геометрическое программирование Нелинейное программирование Оптимальное управление	Теория массового обслуживания Теория полезности Теория принятия решений Теория игр Имитационное моделирование Динамическое программирование

Рис. 40

Многообразие методов лишний раз подтверждает сложность решаемых задач (рис. 40). Следует также подчеркнуть, что эти методы, положенные в основу

[1] Термин «программирование» заимствован из зарубежной литературы и означает «планирование». Его не следует путать с термином, означающим составление программ для ЭВМ.

алгоритмов поиска оптимальных решений, предполагают в основном компьютерную реализацию[1].

Проверка и корректировка модели. В сложных системах модель лишь частично отражает реальный процесс. Поэтому необходима проверка степени соответствия, или адекватности, модели и реального процесса.

Проверку и корректировку модели можно производить, например, по логической схеме: если величина ошибки превышает допустимое значение отклонения (его выбирают исходя из требуемой степени адекватности модели), то это свидетельствует о том, что упущены некоторые важные факторы и взаимосвязи. В этом случае производят корректировку модели.

Корректировка может потребовать дополнительных исследований объекта, уточнения структуры математической модели, многочисленных изменений ее переменных. Таким образом, четыре названных выше этапа повторяют многократно до тех пор, пока не будет достигнуто удовлетворительное соответствие между выходами объекта и модели.

Реализация найденного решения на практике. Это важнейший этап, завершающий операционное исследование. Внедрение можно рассматривать как самостоятельную задачу, применив к ней системный подход и анализ. Полученное предварительно математическое решение облекается в соответствующую содержательную форму и представляется в виде инструкций и рекомендаций.

Само ***принятие решения*** выходит за рамки исследования операций и относится к компетенции ответственного лица (или группы лиц), которому пре-

---

[1] См., например: *Курицкий Б.* Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. СПб.: BHV — СПб., 1997; *Матвеев Л. А.* Компьютерная поддержка решений: Учебник. — СПб.: Специальная литература, 1998.

доставлено право окончательного выбора. При выборе он может учитывать наряду с рекомендациями, вытекающими из математического расчета, еще ряд соображений, не учтенных этим расчетом.

В зависимости от того, какой информацией обладают руководитель и сотрудники, подготавливающие решения (его штаб), условия принятия решений меняются и изменяются математические методы, применяемые для выработки рекомендаций. Если известны все действующие в системе факторы, т.е. отсутствуют случайные воздействия, то это будет *принятие решений в условиях определенности*.

Когда решение может привести не к определенному исходу, а к одному из множества возможных с разными вероятностями их осуществления, то принимающий решение рискует получить не тот результат, на который рассчитывает. Поскольку исход каждой конкретной реализации случаен и потому заранее непредсказуем, метод называют *принятием решений в условиях риска*.

Если исход операции зависит не только от стратегии, избранной руководителем, но и от ряда факторов, не известных в момент принятия решения, например погодных условий, действий, которые предпримет конкурент, противник и т.д., то такая задача называется *принятием решений в условиях неопределенности*.

В общем случае цель операции выражается в стремлении к достижению максимального значения критерия эффективности. При наличии неопределенности это уже не строго математическая задача, которая дает однозначное решение. Теперь нет уверенности в том, что можно получить решение, а если оно будет получено, то нет гарантии, что оно будет единственно правильным. Именно поэтому в формулировке задачи приходится делать оговорку *«по возможности»*.

Таким образом, при решении проблем, возникающих в реальной жизни, математическая теория и научно обоснованные методы не дают точного решения. Причина этого в том, что когда нет точных данных, т. е. *нет полной информации, то остается лишь предполагать и строить догадки*, но было бы наивно считать, что все предположения обязательно сбудутся.

И все-таки решение, принятое в условиях неопределенности, но на основании математических расчетов, будет лучше, чем взятое наугад первое попавшееся. Задача исследования операций заключается в том, чтобы это решение в возможно большей степени содержало черты разумности; именно в этом смысле надо понимать определение «по возможности оптимальное».

Один из зарубежных специалистов так определил исследование операций: это *искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые другими методами ответы даются еще худшие*. Действительно, любой конструктивный или технологический вариант, выбранный в условиях неопределенности, вполне вероятно, может оказаться хуже выбранного в условиях, когда известны все факторы и причины, влияющие на функционирование. Но все же лучше проанализировать предположения и догадки, чем наобум взять случайно попавшийся вариант. Это необходимо учитывать при разработке модели операции: нет надобности разрабатывать точную и подробную модель, поскольку решение все равно будет приближенным.

Сложность задач принятия решений в условиях неопределенности зависит от природы неизвестных факторов. По этому признаку они делятся на два класса:

1) стохастические задачи исследования операций, когда неизвестные факторы представляют собой случайные величины, для которых известны

законы распределения вероятностей и другие статистические характеристики;

2) неопределенные задачи исследования операций, когда неизвестные факторы не могут быть описаны статистическими методами.

Приведем пример стохастической задачи исследования операций. Пусть организуется работа кафе, столовой или другого предприятия общественного питания. Какое количество посетителей придет в него за день, нам не известно. Точно так же не известно, сколько времени будут обслуживать каждого посетителя. Однако характеристики этих случайных величин могут быть получены статистическим путем. Показатель эффективности, зависящий от случайных факторов, тоже будет случайной величиной.

Первое, что приходит в голову, — взять в качестве показателя эффективности не саму случайную величину, а ее среднее значение и выбрать такое решение, при котором это среднее значение обращается в максимум (или в минимум). Именно так и поступают, т.е. выбирают в качестве показателя эффективности операции, исход которой зависит от случайных факторов, среднее значение. Таким образом получают «средний доход» за единицу времени, «среднее время простоя» и т.д.

Что такое теория принятия решений? Теория принятия решений представляет собой набор понятий и систематических методов, позволяющих всесторонне анализировать проблемы принятия решений в условиях неопределенности. Совершенствование процесса принятия решений — цель рассматриваемой теории. В ее основе лежит предположение о том, что выбор альтернатив должен определяться двумя факторами:

1) представлениями лица, принимающего решение, о вероятностях различных возможных исходов

(последствий), которые могут иметь место при выборе того или иного варианта решения;

2) предпочтениями, отдаваемыми им различным возможным исходам.

Оба фактора формально входят в теорию принятия решений, и, чтобы их учесть, потребуется представить в виде цифр: суждения о возможных последствиях (опираясь на понятие субъективной вероятности) и высказывания о предпочтениях (используя теорию полезности).

«Разделяй и властвуй» — вот девиз теории принятия решений. Согласно методике этой теории, рассматриваемую проблему необходимо разбить на части, которые следует изучать и анализировать отдельно, а затем построить общую модель для принятия решений.

Для удобства следует выделить следующие этапы в процессе принятия решений.

1. *Определение альтернативных способов действия.* Должен быть задан подходящий набор целей и указаны соответствующие меры эффективности; это дает возможность определить степень, с которой заданные цели могут быть достигнуты с помощью различных способов действия. Для каждого способа действия возможные исходы описываются в единицах принятых мер эффективности. Кроме того, необходимо указать, как изучаемый процесс (задача) развивается во времени, и описать способ сбора информации.

2. *Описание вероятностей возможных исходов.* Неопределенность, связанная с альтернативными решениями, должна быть выражена численно через распределение вероятностей. В результате такой операции становится известной вероятность каждого возможного исхода для каждого принятого решения.

3. *Ранжировка предпочтений возможных исходов через их полезность.* Для этого выбирают меру эффективности, а затем с ее помощью представляют в

числовой форме как отношение лица, принимающего решение, к последствиям (исходам) и вероятности возможных исходов.

4. *Рациональный синтез информации, полученной на первых трех этапах.* Следует проанализировать и эффективно использовать всю полученную информацию, чтобы решить, какой из возможных альтернатив следует отдать предпочтение. Данный этап включает также анализ чувствительности.

Эти этапы являются основой подхода к принятию решений с точки зрения здравого смысла. Отличительная черта процесса принятия решений — степень формализации каждого этапа.

Значение теории принятия решений. Теория принятия решений предписывает нормы поведения лицу, принимающему решение, которым он должен следовать, чтобы не вступить в противоречие с собственными суждениями и предпочтениями. Теория не дает метода описания того, как фактически отдельные лица должны себя вести. Она помогает лицу, принимающему решение, вооружая методологией для принятия сложных решений, которые включают элементы субъективизма, однако не заменяют его. Характерно, что с усложнением задачи уменьшается способность человека к неформальной обработке всей информации в соответствии с его собственными суждениями и предпочтениями. В такой ситуации теория принятия решений имеет преимущества перед другими аналитическими подходами, поскольку включает в формализованном виде многие субъективные аспекты проблемы. Первая попытка ее применения может потребовать значительных усилий, но они того же порядка, что и для любого метода анализа сложной ситуации.

Круг задач, стоящих перед теорией принятия решений. Типичные задачи принятия решений имеют много особенностей, которые можно проанализировать и лучше понять с помощью теории принятия решений. Перечислим основные из них.

1. *Многоцелевой характер.* В большинстве сложных задач приходится стремиться к достижению различных целей. Эти цели почти всегда противоречивы, т.е. продвижение по пути достижения некоторой цели обычно сопровождается ухудшением результатов по другим. Таким образом, лицо, принимающее решение, неизбежно оказывается перед необходимостью выбора между противоречивыми целями.

2. *Воздействие фактора времени.* Все важные последствия решения задачи не проявляются сразу, и нельзя указать конкретный момент времени, когда можно наблюдать то или иное последствие. Например, при производстве нового товара иногда приходится рисковать значительными суммами в течение многих лет.

3. *Неформализуемые понятия.* Такие понятия, как «добрая воля», «престиж», «волнение», «шутка», «страдание», «политические действия» и др., являются примерами очень важных неформализуемых понятий, существенно усложняющих задачу.

4. *Неопределенность.* Как уже отмечалось, маловероятно, что в момент принятия решения, т. е. выбора альтернативного действия, известны последствия каждой из альтернатив. Такое утверждение становится убедительным в свете описанных выше особенностей задачи.

5. *Возможности получения информации.* Часто удается получить информацию, помогающую решить, какую из альтернатив следует выбрать. Например, можно проанализировать рыночную конъюнктуру, чтобы оценить спрос на новый вид продукции. Однако получение такой информации может потребовать больших затрат времени и денег, и к тому же она может быть не вполне достоверной.

6. *Динамические аспекты процесса принятия решений*. После того как некоторое решение выработано (выбрана альтернатива), может оказаться, что задача не исчерпана до конца и потребуется принятия очередного решения через несколько лет. Сегодняшнее решение может «захлопнуть дверь» перед некоторыми возможными действиями и «распахнуть пошире» перед другими. Важно распознать заранее такие динамические аспекты проблемы и увидеть, какие возможности могут открыться в будущем благодаря данному решению.

7. *Влияние решений на группы*. Некоторая выбранная альтернатива может повлиять на большое количество различных групп, особенно это относится к правительственным решениям. Очевидно, что в такой ситуации были бы полезны любые сведения, способные оказать помощь лицу, ответственному за принятие решения.

8. *Коллективное принятие решений*. Зачастую ответственность за выбор альтернативы несет не отдельное лицо, а целая группа. Фактически для определенного круга задач нельзя четко разграничить функции и ответственность лиц, принимающих решение по некоторому кругу вопросов.

Большинство задач не обладает перечисленными особенностями, однако их вполне достаточно для того, чтобы сделать задачу трудноразрешимой. Теория принятия решений позволяет анализировать эти вопросы независимо и дает схему для последующего синтеза информации с целью выработки наилучшего способа действия.

Для более детального изучения вопросов данного раздела можно рекомендовать следующие работы[1].

---

[1] См. *Эддоус М., Стэнсфилд Д.* Методы принятия решений. – М.: Аудит: ЮНИТИ, 1997; *Перегудов Ф. И., Тарасенко Ф. П.* Введение в системный анализ. – М.: Высш. шк., 1989.

* * *

В заключение хочется подчеркнуть, что дальнейшее освоение математических методов возможно при самостоятельной работе, причем как с помощью учебников по математике и статистике, так и с конкретным материалом, для анализа которого используются математические методы. Это чрезвычайно интересно и плодотворно, хотя нелегко. Как выразился У. Шекспир, «если бы делать было бы столь же легко, как знать, что надо делать, — часовни были бы соборами, хижины — дворцами».

В применении математических методов в гуманитарных науках много нового, неизведанного, поскольку это одно из новых, молодых направлений науки. И для каждого, кто пожелает здесь приложить свои силы, открывается широкое поле деятельности; профессионализм, как известно, приобретают на практике.

Известно, что для ученого и инженера математика — это орудие, для математика-профессионала — религия, а для обычного человека — камень преткновения. Будем надеяться, что данный курс помог по-другому взглянуть на математику, вскрыть ее внутреннюю логику и связи.

Как заметил выдающийся русский математик и кораблестроитель академик А. Н. Крылов, человек обращается к математике «не затем, чтобы любоваться неисчислимыми сокровищами». Ему, прежде всего, нужно ознакомиться со «столетиями испытанными инструментами и научиться ими правильно и искусно владеть».

Контрольные вопросы и упражнения

1. Абстракция есть атрибут применения математических методов. Как вы понимаете этот термин?

2. Что такое «метод экспертных оценок»?

3. Какова роль весовых множителей в математических моделях?

4. Что такое многокритериальность и какие существуют основные подходы при принятии решений в таких случаях?

5. Принятие решений — это процесс. Что является конечным результатам этого процесса?

6. Цель при принятии решений может быть сформулирована в виде: а) целевой функции; б) отношения предпочтения.

Какой способ позволяет построить более адекватную модель при изучении сложных систем? Поясните с помощью теоретико-множественных понятий.

7. Когда и в связи с чем появился термин «исследование операций»? Каково его современное понимание?

8. Перечислите типичные задачи, решаемые с помощью метода исследования операций.

9. Что вкладывается в понятие «целевая функция»? Приведите примеры.

10. Как в общем случае можно записать задачу поиска оптимального решения в условиях определенности?

Я слышу, и я забываю.
Я вижу, и я запоминаю.
Я делаю, и я понимаю.

Китайская пословица

Варианты заданий для самостоятельной работы

Задание 1

Задача 1. Заданы два множества: A и B (см. таблицу). Определить множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.

Вариант	Множество A	Множество B
1	{1, 5, 7, 11}	{5, 9, 11, 15}
2	{1, 3, 5, 7, 11}	{3, 5, 9}
3	{2, 4, 6, 9}	{1, 2, 3, 6}
4	{4, 6, 10, 16}	{6, 10, 12, 18}
5	{4, 6, 10, 12}	{4, 8, 12, 16}
6	{1, 3, 5, 9}	{3, 5, 7, 11, 13}
7	{2, 4, 9, 13}	{4, 6, 9}
8	{1, 3, 9, 11}	{2, 3, 5, 6, 7}
9	{2, 4, 8, 12}	{3, 4, 5, 8, 10}
10	{1, 3, 6, 8}	{3, 4, 5, 6}

Задача 2. По данным промежуткам A и B на числовой прямой, определить $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Вариант	A	B
1	$(0; 3]$	$(3; 6)$
2	$[0; 5)$	$[1; \infty)$
3	$(0; 3)$	$[1; 4]$
4	$[2; \infty)$	$(1; 7]$
5	$(-6; -3]$	$[-5; -1)$

Окончание

Вариант	*A*	*B*
6	$[-4;-0{,}5)$	$(-\infty;-2)$
7	$(-\infty;\ 1]$	$(-2;\ \infty)$
8	$[-6;\ 7]$	$(0;\ 10)$
9	$(-6;\ 2]$	$[-2;\ 3]$
10	$(0;\ 2)$	$[1;\ 5)$

З а д а ч а 3

1. Экзамен по математике сдавали 25 студентов, оценку ниже 5 получили 18 человек, а выдержал этот экзамен 21 студент. Сколько человек получили оценки 3 и 4?

2. На учете в детской комнате милиции состоит 140 учащихся школ. Из них 125 живут в неблагополучных семьях, 95 были задержаны за кражи, 6 учащихся не проживают в неблагополучных семьях и были задержаны не за кражи. Сколько учащихся, состоящих на учете, живут в неблагополучных семьях и были задержаны за кражи?

3. В группе 40 туристов, из них 28 человек знают английский язык, 18 — немецкий и 9 — оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни немецкого языка?

4. В штучном отделе магазина посетители обычно покупают либо один торт, либо одну коробку конфет, либо торт и одну коробку конфет. В один из дней было продано 55 тортов и 37 коробок конфет. Сколько было покупателей, если 10 человек купили и торт, и коробку конфет?

5. В течение недели в кинотеатре демонстрировались фильмы *A*, *B* и *C*. Из 30 школьников, каждый из которых посмотрел либо все три фильма, либо один из трех, фильм *A* видели 11, фильм *B* — 13, фильм *C* — 16 школьников. Найти, сколько учеников просмотрели все три фильма.

6. В отряде из 40 ребят 32 умеют плавать, 25 умеют играть в теннис и только четверо не умеют ни того, ни другого. Сколько ребят умеют плавать и играть в теннис?

7. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 38 учеников класса читал книги *A*, *B* и *C*. Результаты опроса оказались таковы: книгу *A* читали 23 учащихся, книгу *B* — 20, книгу *C* —

19. Книгу A или B читали 31 ученик, A или C — 30 учеников, B или C — 28; все три книги прочли 8 учащихся. Сколько учеников прочли только по одной книге? Сколько учащихся не прочитали ни одной из этих трех книг?

8. В делегации из 20 человек было 10 москвичей и 12 мужчин. Женщин не москвичек было 5. Сколько было в делегации: а) женщин-москвичек; б) мужчин не из Москвы?

9. В классе 25 учеников. Из них занимаются спортом 16 человек, музыкой — 17 человек и не увлекаются ни тем, ни другим 5 человек. Сколько учеников в классе увлекаются: а) только спортом; б) только музыкой; в) и тем, и другим; г) хотя бы чем-то одним?

10. В классе 30 человек. Из них хорошо знают математику 14 человек, географию — 17 человек, не знают хорошо этих предметов — 5 человек. Сколько учеников в классе: а) хорошо знают хотя бы один из этих предметов; б) хорошо знают оба предмета?

Задание 2

Задача 1. Даны две матрицы **A** и **B**. Найти матрицу **C**.

Вариант	Исходные матрицы A и B		C
1	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 6 & 5\\ 6 & -3 & 4\end{pmatrix}$	$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 4 & -5\\ -7 & -3 & -6\end{pmatrix}$	$\mathbf{C}=6\mathbf{A}-\mathbf{B}$
2	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-4 & +4 & 4\\ -3 & -5 & 5\end{pmatrix}$	$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}+2 & -4 & +5\\ -5 & +3 & -5\end{pmatrix}$	$\mathbf{C}=-10\mathbf{A}+\mathbf{B}$
3	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & 6 & -1\\ -3 & 3 & 5\end{pmatrix}$	$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 5\\ 2 & -7 & -6\end{pmatrix}$	$\mathbf{C}=7\mathbf{A}-10\mathbf{B}$
4	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -6 & -7\end{pmatrix}$	$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4 & -4 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$	$\mathbf{C}=6\mathbf{A}+4\mathbf{B}$
5	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-6 & -3 & -1\\ -3 & -5 & 5\end{pmatrix}$	$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-6 & 6 & 2\\ 2 & -7 & 4\end{pmatrix}$	$\mathbf{C}=9\mathbf{A}+9\mathbf{B}$
6	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 5 & -5\\ -6 & -6 & -6\end{pmatrix}$	$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ 5 & -1 & -6\end{pmatrix}$	$\mathbf{C}=2\mathbf{A}-\mathbf{B}$

Окончание

Вариант	Исходные матрицы A и B		C
7	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\mathbf{C} = 3\mathbf{A} + 8\mathbf{B}$
8	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\mathbf{C} = 7\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$
9	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 6 & -4 & -3 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & -4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$	$\mathbf{C} = \mathbf{A} + 5\mathbf{B}$
10	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & -2 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\mathbf{C} = -7\mathbf{A} - 4\mathbf{B}$

З а д а ч а 2. Даны две матрицы-строки **A** и **B**. Транспонируйте матрицу **B** и найдите произведение $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$.

Вариант	Исходные матрицы A и B	
1	$\mathbf{A} = (4\ \ -2\ \ 5)$	$\mathbf{B} = (1\ \ -3\ \ -8)$
2	$\mathbf{A} = (3\ \ 3\ \ -2)$	$\mathbf{B} = (3\ \ -3\ \ -8)$
3	$\mathbf{A} = (4\ \ -9\ \ 5)$	$\mathbf{B} = (5\ \ -6\ \ 3)$
4	$\mathbf{A} = (-4\ \ 3\ \ -1)$	$\mathbf{B} = (7\ \ -9\ \ 6)$
5	$\mathbf{A} = (7\ \ -1\ \ -5)$	$\mathbf{B} = (9\ \ -8\ \ -2)$
6	$\mathbf{A} = (-1\ \ -1\ \ -5)$	$\mathbf{B} = (11\ \ 6\ \ -6)$
7	$\mathbf{A} = (-7\ \ -8\ \ -5)$	$\mathbf{B} = (13\ \ -3\ \ -2)$
8	$\mathbf{A} = (7\ \ 6\ \ -6)$	$\mathbf{B} = (15\ \ 5\ \ -8)$
9	$\mathbf{A} = (-6\ \ 4\ \ 1)$	$\mathbf{B} = (17\ \ -7\ \ 6)$
10	$\mathbf{A} = (8\ \ 3\ \ 7)$	$\mathbf{B} = (19\ \ 4\ \ -2)$

З а д а ч а 3. Дана матрица **A** и матрица-строка **B**. Транспонируйте матрицу **B** и найдите произведение $\mathbf{C} = \mathbf{AB}^{\mathrm{T}}$.

Вариант	Исходные матрицы A и B	
1	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -6 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = (1 \quad -3 \quad -8)$
2	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = (3 \quad -3 \quad -8)$
3	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & 5 \\ 4 & -9 & 5 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = (5 \quad -6 \quad 3)$
4	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & -7 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = (7 \quad -9 \quad 6)$
5	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 2 \\ -3 & -5 & 5 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = (9 \quad -8 \quad -1)$
6	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -6 & -6 & 6 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = (11 \quad 6 \quad -6)$
7	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \\ -7 & -8 & -5 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = (13 \quad -3 \quad -2)$
8	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & -6 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = (15 \quad 5 \quad -8)$
9	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & -4 \\ 6 & -4 & -3 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = (17 \quad -7 \quad 6)$
10	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 5 & 5 & -5 \\ 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = (19 \quad 4 \quad -2)$

З а д а ч а 4. Даны две квадратные матрицы **A** и **B**. Найти произведение **AB** и **BA**. Найти определитель каждой матрицы.

Вариант	Исходные матрицы	
1	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$
2	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
3	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$
4	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -9 & -7 \end{pmatrix}$
6	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$
7	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
8	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -7 & -7 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
9	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$
10	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$

З а д а ч а 5. Используя формулы Крамера, а также обратную матрицу решить системы уравнений.

Вариант	Система уравнений	
1	$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 7x-5y=-3 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x+3y-z=10 \\ 4x+2y+2z=16 \\ -2x+y+z=0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 3x-y=5 \\ x+4y=6 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+3y-2z=-3 \\ x-2y+4z=5 \\ 3x+4y+4z=9 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x-3y=4 \\ x-y=5 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x+3y-2z=4 \\ -2x+2y+z=5 \\ 3x+y-3z=-4 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-y=8 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+4y+z=12 \\ -2x+3y+4z=5 \\ x-5y+z=0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} -2x+y=5 \\ 7x-y=-15 \end{cases}$	$\begin{cases} 6x+2y-4z=4 \\ 3x+2y-3z=3 \\ -4x+4y-2z=4 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x+5y=14 \\ -x+4y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} -2x+10y-4z=0 \\ 4x-8y+6z=10 \\ 2x-4y+2z=4 \end{cases}$
7	$\begin{cases} -3x+y=5 \\ 8x-2y=-12 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y-z=5 \\ 3x+4y+3z=7 \\ x+5y+4z=5 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 5x+y=-8 \\ 3x-2y=-10 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x-3y+2z=-3 \\ 2x+2y+6z=4 \\ 3x-2y+2z=-2 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 4x-2y=2 \\ -x-4y=-14 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-2y+3z=3 \\ 4x+3y-6z=8 \\ -3x+4y+2z=4 \end{cases}$
10	$\begin{cases} -x+2y=-1 \\ 2x-y=5 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+4y+2z=7 \\ 2x+3y+3z=6 \\ 2x+y+3z=8 \end{cases}$

Задание 3

Задача 1. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\overline{c} = 3\overline{a} - 2\overline{b}$.

Вариант	Исходные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$	
1	$\overline{a}\ \{4; 2; -3\}$	$\overline{b}\{1; -1; 2\}$
2	$\overline{a}\ \{1; 3; -4\}$	$\overline{b}\{2; 1; -3\}$
3	$\overline{a}\ \{-2; 2; 1\}$	$\overline{b}\{3; -2; 1\}$
4	$\overline{a}\ \{3; -1; 2\}$	$\overline{b}\{-4; 1; 2\}$
5	$\overline{a}\ \{-4; 1; 1\}$	$\overline{b}\{1; 2; -1\}$
6	$\overline{a}\ \{1; -2; 3\}$	$\overline{b}\{2; -3; 1\}$
7	$\overline{a}\ \{-2; 3; 1\}$	$\overline{b}\{3; 4; -2\}$
8	$\overline{a}\ \{3; 2; -1\}$	$\overline{b}\{4; -2; 1\}$
9	$\overline{a}\ \{4; 3; -1\}$	$\overline{b}\{-1; 3; 2\}$
10	$\overline{a}\ \{1; -1; 3\}$	$\overline{b}\{2; 4; -2\}$

Задача 2. Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти внутренние углы этого треугольника.

Вариант	Координаты вершин		
1	$A\,(4; 3; -1)$	$B\,(-7; 8; 6)$	$C\,(1; -3; 7)$
2	$A\,(-2; 0; 4)$	$B\,(8; -4; 1)$	$C\,(2; 3; -2)$
3	$A\,(2; -3; 1)$	$B\,(3; 7; -5)$	$C\,(-4; 3; 0)$
4	$A\,(-2; 4; 3)$	$B\,(9; -3; 2)$	$C\,(2; 1; -6)$
5	$A\,(5; -4; 0)$	$B\,(9; 0; -5)$	$C\,(-2; 7; 1)$
6	$A\,(-1; 4; 1)$	$B\,(5; -4; 7)$	$C\,(4; 1; 0)$
7	$A\,(3; 0; -4)$	$B\,(-2; 4; 5)$	$C\,(1; -3; 6)$
8	$A\,(4; 5; -2)$	$B\,(7; -3; 0)$	$C\,(-2; 3; 8)$
9	$A\,(1; -3; 2)$	$B\,(6; 3; -9)$	$C\,(-1; 6; 4)$
10	$A\,(0; 4; -1)$	$B\,(-8; 6; 3)$	$C\,(8; 5; -4)$

З а д а ч а 3. Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти площадь этого треугольника.

Вариант	Координаты вершин		
1	$A(-4; 3; 0)$	$B(-8; 6; 3)$	$C(2; -3; 1)$
2	$A(2; 1; -6)$	$B(9; 0; -5)$	$C(-2; 4; 3)$
3	$A(1; -3; 7)$	$B(5; -4; 7)$	$C(4; 3; -1)$
4	$A(2; 3; -2)$	$B(-2; 4; 5)$	$C(-2; 0; 4)$
5	$A(-1; 6; 4)$	$B(7; -3; 0)$	$C(1; -3; 2)$
6	$A(8; 5; -4)$	$B(3; 7; -5)$	$C(0; 4; -1)$
7	$A(-2; 7; 1)$	$B(9; -3; 2)$	$C(5; -4; 0)$
8	$A(4; 1; 0)$	$B(-7; 8; 6)$	$C(-1; 4; 1)$
9	$A(1; -3; 6)$	$B(8; -4; 1)$	$C(3; 0; -4)$
10	$A(-2; 3; 8)$	$B(6; 3; -9)$	$C(4; 5; -2)$

З а д а ч а 4. Даны координаты точек $ABCD$. Найти объем пирамиды $ABCD$ и длину ее высоты, опущенной из вершины D.

Вариант	Координаты точек			
1	$A(2; -3; 1)$	$B(5; -1; 2)$	$C(-4; 3; 0)$	$D(3; 7; -5)$
2	$A(-2; 4; 3)$	$B(7; 0; -5)$	$C(2; 1; -6)$	$D(9; -3; 2)$
3	$A(4; 3; -1)$	$B(1; -4; 7)$	$C(5; -3; 7)$	$D(-7; 8; 6)$
4	$A(-2; 0; 4)$	$B(-7; 1; 6)$	$C(2; 3; -2)$	$D(8; -4; 1)$
5	$A(1; -3; 2)$	$B(8; -2; 5)$	$C(-1; 6; 4)$	$D(6; 3; -9)$
6	$A(0; 4; -1)$	$B(2; 7; -2)$	$C(8; 5; -4)$	$D(-8; 6; 3)$
7	$A(5; -4; 0)$	$B(4; 3; -9)$	$C(-2; 7; 1)$	$D(9; 0; -5)$
8	$A(-1; 4; 1)$	$B(-3; 6; 3)$	$C(4; 1; 0)$	$D(5; -4; 7)$
9	$A(3; 0; -4)$	$B(-4; 2; 0)$	$C(1; -3; 6)$	$D(-2; 4; 5)$
10	$A(4; 5; -2)$	$B(2; -1; 1)$	$C(-2; 3; 8)$	$D(7; -3; 0)$

Задание 4

З а д а ч а 1. Даны координаты точек A, B и C. Найти тангенс угла между прямыми AB и AC.

Вариант	**Координаты точек**		
1	$A(0; 2)$	$B(2; 3)$	$C(1; 4)$
2	$A(1; 3)$	$B(3; 4)$	$C(2; 5)$
3	$A(-1; 1)$	$B(1; 2)$	$C(0; 3)$
4	$A(5; 9)$	$B(3; 3)$	$C(2; 6)$
5	$A(3; -1)$	$B(1; 5)$	$C(-2; 3)$
6	$A(5; 1)$	$B(3; 7)$	$C(0; 5)$
7	$A(3; 4)$	$B(1; 3)$	$C(-3; 8)$
8	$A(1; 6)$	$B(3; 0)$	$C(-2; -5)$
9	$A(5; 0)$	$B(2; 3)$	$C(2; 4)$
10	$A(1; 1)$	$B(3; 9)$	$C(0; 2)$

З а д а ч а 2. Даны координаты вершин треугольника ABC. Требуется:

а) составить уравнение медианы, проведенной из вершины B, и вычислить ее длину;

б) составить уравнение высоты, проведенной из вершины A, и вычислить ее длину;

в) найти косинус внутреннего угла B треугольника ABC.

Сделать чертеж.

Вариант	**Координаты вершин**		
1	$A(3; 1)$	$B(-13; -11)$	$C(-6; 13)$
2	$A(26; -5)$	$B(2; 2)$	$C(-2; -3)$
3	$A(-2; 3)$	$B(-18; -9)$	$C(-11; 15)$
4	$A(28; 2)$	$B(4; -5)$	$C(10; -2)$
5	$A(8; -1)$	$B(-8; 11)$	$C(-1; -13)$
6	$A(17; -4)$	$B(-7; -11)$	$C(-11; -8)$
7	$A(9; -3)$	$B(-7; -15)$	$C(0; 9)$
8	$A(18; 3)$	$B(-6; 10)$	$C(-10; 7)$
9	$A(7; 4)$	$B(-9; -8)$	$C(-2; 16)$
10	$A(19; 3)$	$B(-5; -4)$	$C(-9; -1)$

З а д а ч а 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A, B и C.

Вариант	Координаты вершин		
1	$A(-4; 3; 0)$	$B(-8; 6; 3)$	$C(2; -3; 1)$
2	$A(2; 1; -6)$	$B(9; 0; -5)$	$C(-2; 4; 3)$
3	$A(1; -3; 7)$	$B(5; -4; 7)$	$C(4; 3; -1)$
4	$A(2; 3; -2)$	$B(-2; 4; 5)$	$C(-2; 0; 4)$
5	$A(-1; 6; 4)$	$B(7; -3; 0)$	$C(1; -3; 2)$
6	$A(8; 5; -4)$	$B(3; 7; -5)$	$C(0; 4; -1)$
7	$A(-2; 7; 1)$	$B(9; -3; 2)$	$C(5; -4; 0)$
8	$A(4; 1; 0)$	$B(-7; 8; 6)$	$C(-1; 4; 1)$
9	$A(1; -3; 6)$	$B(8; -4; 1)$	$C(3; 0; -4)$
10	$A(-2; 3; 8)$	$B(6; 3; -9)$	$C(4; 5; -2)$

З а д а ч а 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A параллельно заданной плоскости.

Вариант	Координаты точки	Уравнение плоскости
1	$A(4; 3; -1)$	$2x+3y-5z+4=0$
2	$A(-2; 0; 4)$	$3x-4y+6z+5=0$
3	$A(2; -3; 1)$	$2x+y+3z-4=0$
4	$A(3; 0; -4)$	$x-2y-3z-2=0$
5	$A(4; 5; -2)$	$3x+4y-6z+5=0$
6	$A(0; 4; -1)$	$4x-5y+3+2=0$
7	$A(-1; 4; 1)$	$x-3y-4z-1=0$
8	$A(5; -4; 0)$	$x+4y+2z-3=0$
9	$A(-2; 4; 3)$	$4x+5y-6z+3=0$
10	$A(1; -3; 2)$	$5x-6y+3z+2=0$

Задание 5

Задача 1. Найти пределы функции $\lim\limits_{x\to a} y$ при различных значениях a (не применяя правила Лопиталя).

Вариант	y	a
1	$\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$	2; 3; ∞
2	$\dfrac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$	0; 2; ∞
3	$\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$	3; –3; ∞
4	$\dfrac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$	3; –2; ∞
5	$\dfrac{3x^2+14x+8}{2x^2-7x-4}$	2; 4; ∞
6	$\dfrac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}$	2; 5; ∞
7	$\dfrac{7x^2+26x-8}{2x^2+x-28}$	1; –4; ∞
8	$\dfrac{2x^2+15x+25}{x^2+15x+50}$	5; –5; ∞
9	$\dfrac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}$	–2; 1; ∞
10	$\dfrac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$	–2; –1; ∞

Задача 2. Вычислить производную двух функций.

Вариант	***y***	***y***
1	$3x^{-2}+4x^{3}-1$	$\sin(x)\cdot(2x^{5}+5x-5)$
2	$-3x^{-5}+4x^{2}-3$	$\mathrm{arctg}(x)\cdot(x^{5}-x-3)$
3	$-x^{-2}-x^{4}+1$	$\mathrm{ctg}(x)\cdot(5x^{3}+4x+2)$
4	$-x^{-3}+4x^{3}-2$	$\ln(x)\cdot(3x^{2}-3x+4)$
5	$-3x^{-6}+2x^{5}+4$	$\mathrm{tg}(x)\cdot(3x^{3}-2x-3)$
6	$-2x^{-3}+4x^{3}+3$	$\sin(x)\cdot(-3x^{3}+2x-1)$
7	$5x^{-6}+2x^{4}-3$	$\mathrm{arctg}(x)\cdot(4x^{5}-5x-3)$
8	$-2x^{-5}-2x^{3}-1$	$\cos(x)\cdot(-2x^{4}+x+1)$
9	$4x^{-4}-3x^{5}-2$	$\ln(x)\cdot(2x^{4}-3x+2)$
10	$2x^{-2}+5x^{3}+5$	$\arccos(x)\cdot(3x^{2}-2x+4)$

Задача 3. Вычислить y' в точке x_1.

Вариант	***y***	x_1
1	$\frac{5x-3}{3x-3}$	5
2	$\frac{-3x-1}{2x+3}$	–5
3	$\frac{-2x+5}{4x-5}$	2
4	$\frac{-x-1}{-x+2}$	0
5	$\frac{2x-1}{4x+3}$	–5
6	$\frac{5x-5}{5x+2}$	3
7	$\frac{-4x-4}{5x+5}$	5
8	$\frac{-2x+2}{-5x+4}$	3
9	$\frac{-2x+4}{3x-1}$	–5
10	$\frac{-4x+3}{3x-4}$	3

З а д а ч а 4. Найти экстремумы функции.

Вариант	y
1	$2x^3-27x^2+108x+5$
2	$2x^3+6x^2-90x-2$
3	$2x^3+6x^2-48x+5$
4	$2x^3-3x^2-36x-3$
5	$2x^3+15x^2+24x-3$
6	$2x^3-3x^2-36x+3$
7	$2x^3-18x^2+48x+4$
8	$2x^3+12x^2+18x-4$
9	$2x^3-15x^2+36x-1$
10	$2x^3+12x^2-30x-3$

З а д а ч а 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции y на отрезке.

Вариант	y	**Отрезок**
1	$-5x^2+40x+3$	$[0, 7]$
2	$4x^2-24x+5$	$[2, 5]$
3	$4x^2+32x+4$	$[-6,-3]$
4	$3x^2+24x-2$	$[-6,-3]$
5	$-5x^2-50x-2$	$[-6,-1]$
6	$3x^2+30x-2$	$[-6,-2]$
7	$2x^2-20x+2$	$[2,9]$
8	$2x^2-20x+5$	$[1,8]$
9	$2x^2-12x-1$	$[2,6]$
10	$4x^2+32x-4$	$[-8,-3]$

Задача 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to a} y$.

Вариант	***y***	***a***
1	$\dfrac{4x^2-8x+4}{4x^2+12x-16}$	1
2	$\dfrac{-4x^2-24x-32}{5x^2+10x}$	– 2
3	$\dfrac{3x^2+9x+6}{-2x^2-12x-10}$	– 1
4	$\dfrac{-3x^2-15x-18}{5x^2+15x}$	– 3
5	$\dfrac{5x^2-10x-15}{-3x^2+12x+15}$	– 1
6	$\dfrac{-5x^2-10x-5}{-2x^2+6x+8}$	– 1
7	$\dfrac{-2x^2-4x+6}{3x^2+18x+27}$	– 3
8	$\dfrac{2x^2-14x+24}{-24x^2+8x-6}$	3
9	$\dfrac{-3x^2-18x-15}{5x^2+50x+125}$	– 5
10	$\dfrac{2x^2+10x+12}{4x^2+4x-24}$	– 3

Задание 6

Задача 1. Вычислить следующие интегралы.

Вариант	*а*	*б*	*в*
1	$\int \frac{-8x^2-4x-2}{-5x}dx$	$\int \sin(-2x+5)dx$	$\int x^2 \ln x\, dx$
2	$\int \frac{4x^2+5x-5}{-3x}dx$	$\int \sin(2x+3)dx$	$\int x^7 \ln x\, dx$
3	$\int \frac{-4x^2-2x-2}{-x}dx$	$\int \cos(3x-4)dx$	$\int x^5 \ln x\, dx$
4	$\int \frac{-10x^2+4x+5}{3x}dx$	$\int \sin(-2x+5)dx$	$\int x^8 \ln x\, dx$
5	$\int \frac{-4x^2-2x-1}{-2x}dx$	$\int \cos(-3x+3)dx$	$\int x^7 \ln x\, dx$
6	$\int \frac{8x^2+2x-5}{5x}dx$	$\int \sin(-5x+3)dx$	$\int x^4 \ln x\, dx$
7	$\int \frac{10x^2-5x+5}{-3x}dx$	$\int \sin(3x-1)dx$	$\int x^8 \ln x\, dx$
8	$\int \frac{-4x^2-5x-5}{-5x}dx$	$\int \sin(-2x-3)dx$	$\int x^6 \ln x\, dx$
9	$\int \frac{6x^2+4x-5}{-4x}dx$	$\int \cos(5x+3)dx$	$\int x^9 \ln x\, dx$
10	$\int \frac{10x^2-5x-4}{4x}dx$	$\int \sin(2x-3)dx$	$\int x^3 \ln x\, dx$

Задача 2. Вычислить следующие определенные интегралы.

Вариант	*а*	*б*
1	$\int_{-1}^{2}(x^2+2x+1)dx$	$\int_{e}^{4}x\ln x\,dx$
2	$\int_{-1}^{0}(x^3+2x)dx$	$\int_{0}^{\pi/2}x\cos x\,dx$
3	$\int_{-2}^{3}(4x^3-3x^2+2x+1)dx$	$\int_{0}^{1}xe^x dx$
4	$\int_{1}^{2}(3x^4+2x^2-5)dx$	$\int_{0}^{\pi}e^x\sin x\,dx$
5	$\int_{0}^{1}\sqrt[3]{x}dx$	$\int_{0}^{1}xe^x dx$
6	$\int_{-2}^{3}(2x^3+x^2-5)dx$	$\int_{0}^{\pi}x\cos x\,dx$
7	$\int_{-2}^{2}(x^3+4x)dx$	$\int_{1}^{2}x^{-5}\ln x\,dx$
8	$\int_{1}^{8}\sqrt[3]{x^2}dx$	$\int_{0}^{\pi}x^2\cos x\,dx$
9	$\int_{1}^{4}(x^2+0{,}5)dx$	$\int_{1}^{2}x^2\ln x\,dx$
10	$\int_{0}^{2}(2x+4)dx$	$\int_{-1}^{1}xe^x dx$

З а д а ч а 3. Решить дифференциальное уравнение.

Вариант	**Уравнение**
1	$y' = (y-5)(8x+1)$
2	$y' = (y-3)(-8x+4)$
3	$y' = (y+5)(8x-3)$
4	$y' = (y-2)(8x+4)$
5	$y' = (y-3)(8x-2)$
6	$y' = (y+4)(4x-1)$
7	$y' = (y-4)(-6x-3)$
8	$y' = (y+5)(10x-1)$
9	$y' = (y-4)(4x+5)$
10	$y' = (y+3)(-2x-3)$

З а д а ч а 4. Решить задачу Коши.

Вариант	**Уравнение**	**Начальное условие**
1	$y' = -15x^2 - 4x - 3$	$y(0) = -3$
2	$y' = -6x^2 - 4x - 1$	$y(0) = -1$
3	$y' = -12x^2 + 8x + 4$	$y(0) = 4$
4	$y' = -6x^2 - 4x + 5$	$y(0) = -5$
5	$y' = -12x^2 - 6x - 2$	$y(0) = 3$
6	$y' = 15x^2 - 2x - 3$	$y(0) = 5$
7	$y' = -9x^2 - 4x + 5$	$y(0) = -5$
8	$y' = 15x^2 + 4x + 3$	$y(0) = -1$
9	$y' = -9x^2 + 10x - 1$	$y(0) = -5$
10	$y' = -6x^2 + 8x - 1$	$y(0) = 3$

Задание 7

Задача 1

1. Из урны с 7 красными и 3 синими шарами берут наугад 5 шаров. Какова вероятность того, что все взятые шары окажутся красными?

2. Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков не превысит 6.

3. Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что 2 очка не выпадут ни на одной кости.

4. В урне лежат 8 пронумерованных шаров. Наугад берут 4 шара. Найти вероятность того, что среди взятых шаров 3 будут иметь четные номера.

5. Колода из 36 карт раскладывается случайным образом на две равные части. Какова вероятность того, что все тузы будут в одной части?

6. Набирая номер телефона, абонент забыл три последние цифры. Помня лишь, что все цифры различны, он набирает их наугад. Какова вероятность того, что будут набраны нужные цифры?

7. Имеются 4 ящика, в которые наугад бросают шарики. Всего шариков 4. Какова вероятность того, что все шарики окажутся в одном ящике?

8. Условились ехать в одном электропоезде 6 студентов, но они не договорились о вагоне. Какова вероятность того, что все поедут в одном вагоне, если в поезде 10 вагонов?

9. Телефонный номер содержит 5 цифр. Какова вероятность того, что все цифры различны?

10. В ящике лежат 16 лампочек, из которых 6 перегоревших. Наугад берут 4 лампы. Какова вероятность того, что взятые лампы окажутся хорошими?

Задача 2

1. Из урны, содержащей 4 синих, 3 красных и 2 зеленых шара, наугад выбирают 2 шара. Какова вероятность выбрать 2 шара одного цвета?

2. Из партии в 60 деталей, содержащей 5% брака, наугад выбирают 3 детали. Какова вероятность того, что в выборку попадет не более одной бракованной детали?

3. Из колоды в 32 карты наугад берут 3 карты. Какова вероятность того, что не менее двух карт будут иметь одну масть?

4. В партии 30 деталей, из них 5 нестандартных. Наугад взято 4 детали. Какова вероятность того, что среди взятых деталей более двух стандартных?

5. Из колоды в 52 карты наугад берут 4 карты. Какова вероятность того, что среди взятых карт не меньше двух тузов?

6. В лотерее 30 билетов, из которых 5 выигрышных. Какова вероятность получить более одного выигрышного билета, взяв наудачу 4 билета?

7. Из урны с 4 белыми, 2 синими и 5 черными шарами берут наугад 4 шара. Какова вероятность того, что среди взятых больше половины шаров окажутся черными?

8. Из урны, содержащей 6 белых и 6 черных шаров, наугад берут 4 шара. Какова вероятность того, что белых шаров окажется больше, чем черных?

9. Из партии в 100 деталей, содержащей 5% брака, берут для проверки 5 деталей. Партия принимается, если среди проверяемых не более одной бракованной детали. Найти вероятность приема партии.

10. Из ящика, в котором лежат 3 красных, 5 зеленых и 5 синих шаров, наугад берут 3 шара. Какова вероятность того, что выбранные шары не будут одного цвета?

Задача 3

1. На базу поступают изделия, изготовленные заводами № 1 и № 2. В количественном отношении 2:3. Завод № 1 выпускает 90 % стандартной продукции, а завод № 2 — 80 %. Какова вероятность, что взятое наугад изделие будет стандартным?

2. В ящике 3 белых и 7 чёрных шаров. Один шар вынули наудачу и отложили в сторону. Следующий наугад вынутый шар оказался белым. Какова вероятность того, что отложенный шар был белым?

3. Есть четыре кубика с цифрами на гранях 1, 2...6 и одна правильная пирамида с цифрами на гранях 1, 2, 3, 4. Наугад выбрали предмет и бросили. Выпала цифра 4. Какова вероятность того, что взяли кубик?

4. При обследовании двух одинаковых групп мужчин и женщин было установлено, что среди мужчин 5 % дальтоников, а

среди женщин — 0,25 %. Найти вероятность того, что наугад выбранное лицо: а) страдает дальтонизмом; б) является мужчиной, если известно, что оно страдает дальтонизмом.

5. Два охотника одновременно и независимо стреляют в кабана. Известно, что первый попадает с вероятностью 0,8, а второй — 0,4. Кабан убит, и в нем обнаружена одна пуля. Как делить кабана?

6. Два консервных завода поставляют в магазин мясные и овощные консервы, причем первый завод поставляет продукции в три раза больше второго. Доля овощных консервов в продукции первого завода составляет 60 %, а у второго — 70 %. Для контроля в магазине наугад взято одно изделие. Определить: а) какова вероятность того, что это окажутся мясные консервы; б) взятое изделие оказалось мясными консервами, изготовленными на втором заводе?

7. Первая партия состоит из 15 одинаковых изделий, среди которых два изделия бракованных. Во второй партии 20 таких же изделий, из которых три бракованные. Наудачу взятое изделие из первой партии переложено во вторую, после чего из второй партии выбирается наугад одно изделие. Определить вероятность того, что выбранное изделие окажется бракованным.

8. Первый завод изготавливает 70 % всех лампочек, поступающих в магазин, второй завод — 30 % всех лампочек. Брак для первого завода составляет 0,1 %, а для второго — 0,05 %. Какова вероятность, что купленная лампочка бракованная?

9. По цели произведено три последовательных выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле — 0,3, при втором выстреле — 0,6, при третьем выстреле — 0,8. При одном попадании вероятность поражения цели — 0,4, при двух попаданиях — 0,7, при трёх попаданиях — 1. Определить вероятность поражения цели при трёх выстрелах.

10. На автозавод поступили двигатели от трех моторных заводов. От первого завода поступило 10 двигателей, от второго — 6 и от третьего — 4 двигателя. Вероятности безотказной работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7. Какова вероятность того, что: а) установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока; б) проработавший без дефекта двигатель изготовлен на первом заводе, на втором заводе?

З а д а ч а 4. По заданному закону распределения дискретной случайной величины X найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, функцию распределения и построить её график.

Вариант	Закон распределения
1	X: 2 4 6 8 10 p: 0,2 0,2 0,3 0,2 0,1
2	X: 5 10 15 20 25 p: 0,4 0,1 0,3 0,1 0,1
3	X: 10 12 14 16 18 p: 0,2 0,1 0,4 0,1 0,2
4	X: 5 15 25 35 45 p: 0,2 0,1 0,3 0,2 0,2
5	X: 3 6 9 12 15 p: 0,1 0,2 0,4 0,2 0,1
6	X: 10 20 30 40 50 p: 0,4 0,3 0,1 0,1 0,1
7	X: 1 11 21 31 41 p: 0,2 0,1 0,4 0,2 0,1
8	X: 4 8 12 16 20 p: 0,1 0,3 0,4 0,1 0,1
9	X: 20 30 40 50 60 p: 0,1 0,2 0,4 0,2 0,1
10	X: 10 12 14 16 18 p: 0,2 0,1 0,4 0,1 0,2

Задание 8

Дана интервальная выборка. Требуется:

а) построить гистограмму частот;

б) составить эмпирический ряд распределения;

в) построить полигон частот;

г) найти выборочное среднее, выборочную дисперсию и выборочное среднеквадратическое отклонение;

д) найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

1.

$x_i; x_{i+1}$	5–15	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65	65–75
n_i	3	7	10	40	20	12	8

2.

$x_i; x_{i+1}$	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65	65–75	75–85
n_i	4	16	40	25	7	5	3

3.

$x_i; x_{i+1}$	25–35	35–45	45–55	55–65	65–75	75–85	85–95
n_i	4	11	25	30	15	10	5

4.

$x_i; x_{i+1}$	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90
n_i	4	6	10	40	20	12	8

5.

$x_i; x_{i+1}$	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24	24–28
n_i	4	6	20	40	13	4	3

6.

$x_i; x_{i+1}$	10–14	14–18	18–22	22–26	26–30	30–34	34–38
n_i	7	11	12	60	5	3	2

7.

$x_i; x_{i+1}$	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18
n_i	3	14	24	40	15	2	2

8.

$x_i; x_{i+1}$	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
n_i	3	5	7	25	40	16	4

9.

$x_i; x_{i+1}$	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14
n_i	8	10	60	12	5	3	2

10.

$x_i; x_{i+1}$	2–6	6–10	10–14	14–18	18–22	22–26	26–30
n_i	9	6	14	50	10	6	5

Удивительная учительница в искусстве направлять мысли, приводить в порядок неупорядоченное, выкорчевывать глупости, фильтровать грязное и давать ясность. Но она – тот деликатный цветок, который произрастает не на всякой почве и распускается так, что никто не знает как.

Ж. А. Фабр

Программа курса

ТЕМА 1. Предмет математики. Методологические проблемы и принципы

Место и роль математики в современном мире, мировой культуре и истории, в том числе в гуманитарных науках. Геометрия Евклида как первая естественнонаучная теория. Значение «Начал» Евклида для общечеловеческой культуры. Основные этапы становления и структура современной математики. Принципы математических рассуждений и доказательств. математическое мышление, индукция и дедукция. Теоремы, аксиомы, определения, аксиоматический метод. Достоинства и недостатки математического языка.

ТЕМА 2. Теория множеств

Понятие «множество», элементы множества. Пустое множество. Подмножество, равные множества. Универсальное множество. Круги Эйлера. Основные операции над множествами. Множества и отношения. Бинарные отношения. Способы представления отношений и операции над ними. Общие свойства отношений. Отношения эквивалентности, порядка и толерантности. Основные структуры на множестве.

ТЕМА 3. Элементы дискретной математики

Числа. Основные правила и формулы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания.

Основы теории графов: типы графов; вершины, ребра, дуги; деревья; сетевые графики.

ТЕМА 4. Элементы математической логики

Основные понятия и функции математической логики. Логические операции и формулы. Исчисление высказываний.

ТЕМА 5. Основы линейной алгебры

Определители второго и третьего порядков. Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера. Матрицы. Линейные операции над матрицами. Произведение матриц. Алгебраическое дополнение, обратная матрица, матричный метод решения СЛАУ.

ТЕМА 6. Основы векторной алгебры

Основные понятия. Сложение векторов. Проекция вектора на ось. Разложение вектора по компонентам. Скалярное произведение двух векторов. Векторное произведение двух векторов. Смешанное произведение трех векторов. Ортогональность, коллинеарность, компланарность векторов.

ТЕМА 7. Элементы аналитической геометрии

Прямая на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой. Линии второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Понятие об уравнении плоскости и прямой в пространстве.

ТЕМА 8. Введение в математический анализ

Понятие «функция». Область изменения и область определения функции: определение, графическое изображение. Способы задания функции. Типы функций. Классификация элементарных функций. Теория пределов и техника их вычисления. Два замечательных предела.

ТЕМА 9. Дифференциальное исчисление

Определение производной. Ее геометрический и физический смысл. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью. Разрывы. Правила и формулы дифференцирования. Приложения производной. Правило Лопиталя. Возрастание и убывание функций. Максимумы и минимумы функций. Необходимое и достаточное условия существования экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функций на замкнутом интервале.

ТЕМА 10. Интегральное исчисление

Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его свойства. Методы интегрирования. Таблица основных интегралов. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции. Определенный интеграл: свойства и геометрический смысл. Формула Ньютона — Лейбница. Приложения определенного интеграла.

ТЕМА 11. Дифференциальные уравнения

Понятие «дифференциальное уравнение». Общее и частное решения. Порядок уравнения. Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка. Задача Коши.

ТЕМА 12. Случайные события

Понятие случайного события. Невозможные и достоверные события. Совместные и несовместные события. Противоположные события. Полная группа событий. Пространство элементарных событий. Определение вероятности: классическое, статистическое, геометрическое. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность. Независимые события. Формула полной вероятности и формула Байеса. Схема независимых испытаний.

ТЕМА 13. Случайные величины

Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Законы распределения. Числовые характеристики дискретной случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение. Функция распределения.

ТЕМА 14. Основы математической статистики

Задачи математической статистики. Выборочный метод. Вариационный ряд и эмпирическая функция распределения. Гистограмма и полигон. Числовые характеристики статистических оценок. Выборочная средняя, выборочная дисперсия, среднее квадратическое отклонение. Статистическая проверка гипотез. Нулевая и конкурирующая гипотезы, критерии. Ошибки первого и второго рода. Корреляционно-регрессионный анализ.

ТЕМА 15. Математическое моделирование и принятие решений

Принципы построения математических моделей. Математические методы в целенаправленной деятельности. Общая постановка задачи о принятии решения. Основные понятия исследования операций, типы задач и методы их решения. Частные случаи: выбор оптимального решения, многокритериальная оптимизация. Методы оптимизации.

ИЗВЛЕЧЕНИЯ
из государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования

После освоения математических и естественнонаучных дисциплин бакалавр *должен иметь представление*:

• о месте и роли математики в современном мире, мировой культуре и истории;

• математическом мышлении, индукции и дедукции в математике, принципах математических рассуждений и математических доказательств;

• логических, топологических и алгебраических структурах на множестве;

• неевклидовых геометрических системах;

• математическом моделировании;

• роли математики и информатики в гуманитарных исследованиях.

Основные вопросы по математике, предусмотренные для изучения студентами социально-гуманитарных направлений и специальностей:

• геометрия Евклида как первая естественнонаучная теория;
• аксиоматический метод;
• основные этапы становления современной математики;
• структура современной математики;
• основные черты математического мышления;
• математические доказательства;
• элементы, множества, отношения, отображения;
• числа;
• комбинаторика;
• конечные и бесконечные множества;
• основные структуры на множестве;
• неевклидовы геометрии;
• геометрия микро- и макромира;
• основные идеи математического анализа;
• дифференциальные уравнения;
• общая постановка задачи о принятии решения;
• математические методы в целенаправленной деятельности;
• математика случайного;
• элементы теории вероятностей;
• основные понятия математической статистики;
• математические методы проверки гипотез;
• роль математики в гуманитарных науках.

Очевидно, что стандарт введен с целью содействовать лучшему пониманию предмета математики взамен бездумного манипулирования символами. Нетрудно убедиться, что спектр вопросов достаточно широк и нетрадиционен.

Литература

Богомолов Н. В. Задания по математике с решениями. — М.: Высш. шк., 2006.

Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. — М.: Высш. шк., 2007.

Высшая математика для экономистов / Под ред. Н. Ш. Кремера. — М.: ЮНИТИ, 2003.

Ганичева А.В., Козлов В.П. Математика для психологов. — М.: Аспект Пресс, 2005.

Грес П.В. Математика для гуманитариев. — Новосибирск: НГИ, 1999–2001; М.: Юрайт, 2000; — М.: Логос, 2003–2007.

Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высш. шк., 2001.

Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. — М.: Высш. шк., 1996.

Дорофеева А. В. Учебник по высшей математике для философских факультетов университетов. — М.: Изд-во МГУ, 1971.

Жолков С.Ю. Математика и информатика для гуманитариев. — М.: Гардарики, 2002.

Зайцев И. А. Высшая математика. — М.: Высш. шк., 1998.

Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. — СПб.: Питер, 2004.

Крахин А.В. Математика для юристов. — М.: Флинта: МПСИ, 2005.

Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики. — М.: АСТ: Астрель, 2001.

Математика: Хрестоматия по истории, методологии, дидактике / Сост. Г.Д. Глейзер. — М.: Изд-во УРАО, 2001.

Математика для гуманитариев / Под ред. К.В. Балдина. — М.: Дашков и К°, 2007.

Математический энциклопедический словарь. — М.: Сов. энцикл., 1988.

Москинова Г. И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях. — М.: Логос, 2000.

Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. — СПб.: Лань, 1997.

Очерки по истории математики / Под ред. Б. В. Гнеденко. — М.: Изд-во МГУ, 1997.

Сборник задач по высшей математике для экономистов / Под ред. В.И. Ермакова. — М.: ИНФРА-М, 2006.

Стойлова Л. П. Математика. — М.: Академия, 1997.

Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. — М.: Наука, 1984.

Тихомиров Н. Б., Шелехов А. М. Математика: Учебный курс для юристов. — М.: Юрайт, 1999.

Турецкий В. Я. Математика и информатика. — М.: ИНФРА-М, 2000.

Шипачев В. С. Основы высшей математики. — М.: Высш. шк., 1998.

Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С. Краткий курс высшей математики. Т. 1, 2. — М.: Высш. шк., 1978.

Эддоус М., Стэнсфилд Д. Методы принятия решений. — М.: Аудит: ЮНИТИ, 1997.

Юшкевич А. П. Математика и ее история. — М.: Янус, 1996.

Учебное издание

Грес Павел Власович

Математика для бакалавров

Универсальный курс для студентов гуманитарных направлений

Учебное пособие

Ведущий редактор *Е.В. Комарова*
Редактор *Л.И. Кузнецова*
Корректор *Г.Б. Абудеева*
Компьютерная верстка *Т.В. Клейменовой*
Оформление *А.Б. Дунаевой*

Издательская группа «Логос»
123104, Москва, Б. Палашевский пер., д. 9, стр. 1

Подписано в печать 24.07.2013. Формат 84x108/32.
Печать офсетная. Бумага офсетная. Печ. л. 9.
Тираж 1000 экз. Заказ №

По вопросам приобретения и издания литературы обращаться по адресу:
111024, Москва, ул. Авиамоторная, д. 55, корп. 31
Тел.: (495) 644-38-04, 642-59-89
Электронная почта: universitas@mail.ru
Дополнительная информация на сайте
http://logosbook.ru